



طراحی الگوریتم ها

فصل ۶: شارح بیشینه (Maximum Flow)

لیلا ناموری تازه کند

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

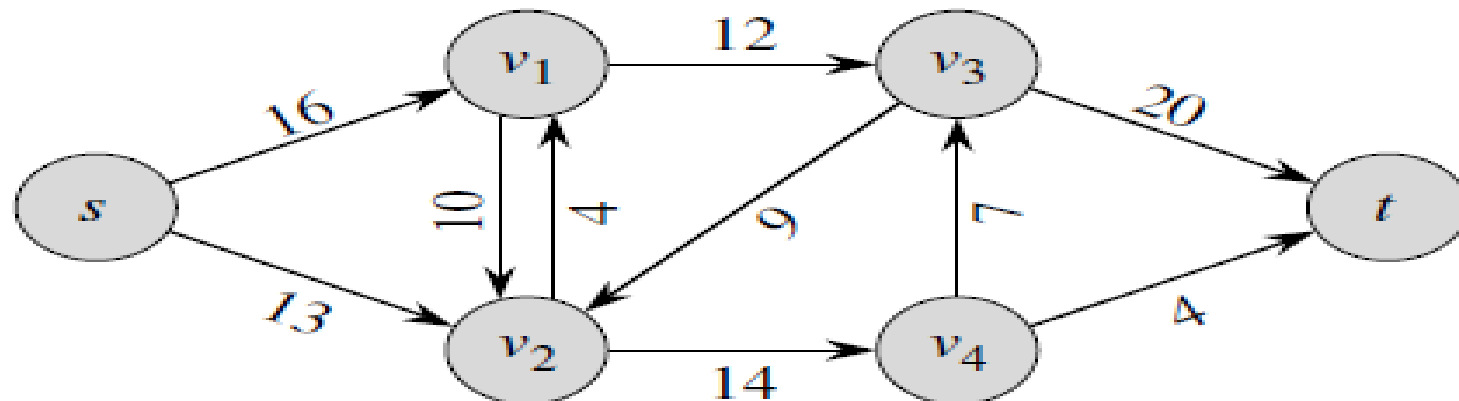
شبکه شار (Flow Network)

✓ **تعریف:** شبکه شار $G=(V,E)$ یک گراف جهتدار است که در آن

۱- هر یال $(u,v) \in E$ یک ظرفیت غیرمنفی $c(u,v) \geq 0$ دارد. اگر $(u,v) \notin E$ آنگاه فرض می کنیم: $c(u,v) = 0$

۲- دارای دو راس مبدا s (source) و مقصد t (sink) می باشد و فرض می شود هر راس گراف، روی مسیری از s به t قرار دارد. بنابراین گراف همبند است.

مثال: شبکه شار برای مساله حمل و نقل یک شرکت. s به عنوان کارخانه تولیدی و t بعنوان انبار شرکت. مواد تولید شده بین شهرهای واسط حمل می شوند اما فقط مقدار $c(u,v)$ صندوق در روز می تواند از شهر u به شهر v منتقل شود



✓ **تعریف:** فرض کنید $G=(V,E)$ یک شبکه شاره با تابع ظرفیت C باشد. یک شاره در G تابعی با مقدار حقیقی $f: V \times V \rightarrow R$ است که در سه ویژگی زیر صدق می کند:

۱- **محدودیت ظرفیت (Capacity constraint):** برای همه $u,v \in V$ داریم:
$$f(u,v) \leq c(u,v)$$

به عبارت دیگر، شاره از یک راس به راس دیگر نباید از ظرفیت داده شده بیشتر باشد.

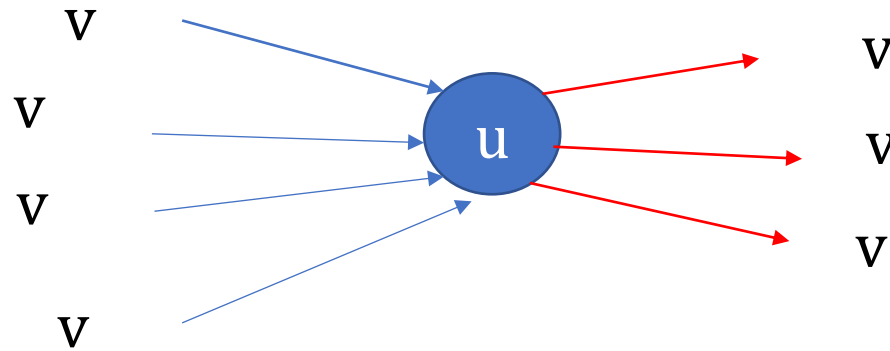
۲- **تقارن مورب (Skew symmetry):** برای همه $u,v \in V$ داریم: $f(u,v) = -f(v,u)$

به عبارت دیگر، شاره از راس u به راس v برابر مقدار منفی شاره در جهت معکوس است.

۳- بقاء شار (Flow conservation): برای همه $u \in V - \{s, t\}$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

به عبارت دیگر، مجموع کل شار ورودی و خروجی از یک راس بغیر از مبدا و مقصد برابر صفر است.



از ویژگی تقارن مورب می توان استفاده کرد و بقاء شار را بصورت زیر بازنویسی کرد: برای همه $u \in V - \{s, t\}$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = 0$$

به عبارت دیگر، شار کل به داخل یک راس بغیر از مبدا و مقصد برابر صفر است.

✓ مقدار شار f به صورت زیر تعریف می شود:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

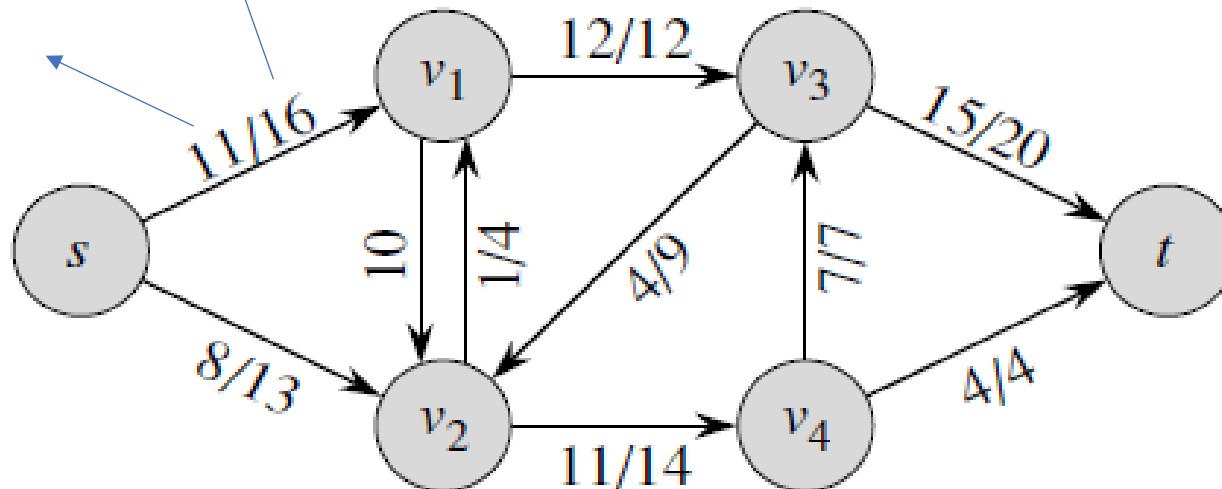
مجموع کل شار خروجی از مبدا

✓ در مساله ماکزیمم شار، هدف پیدا کردن شار با مقدار ماکزیمم است.
✓ مثال:

شار عبوری:
 $f(s, v1)$

ظرفیت:
 $c(s, v1)$

مبدا

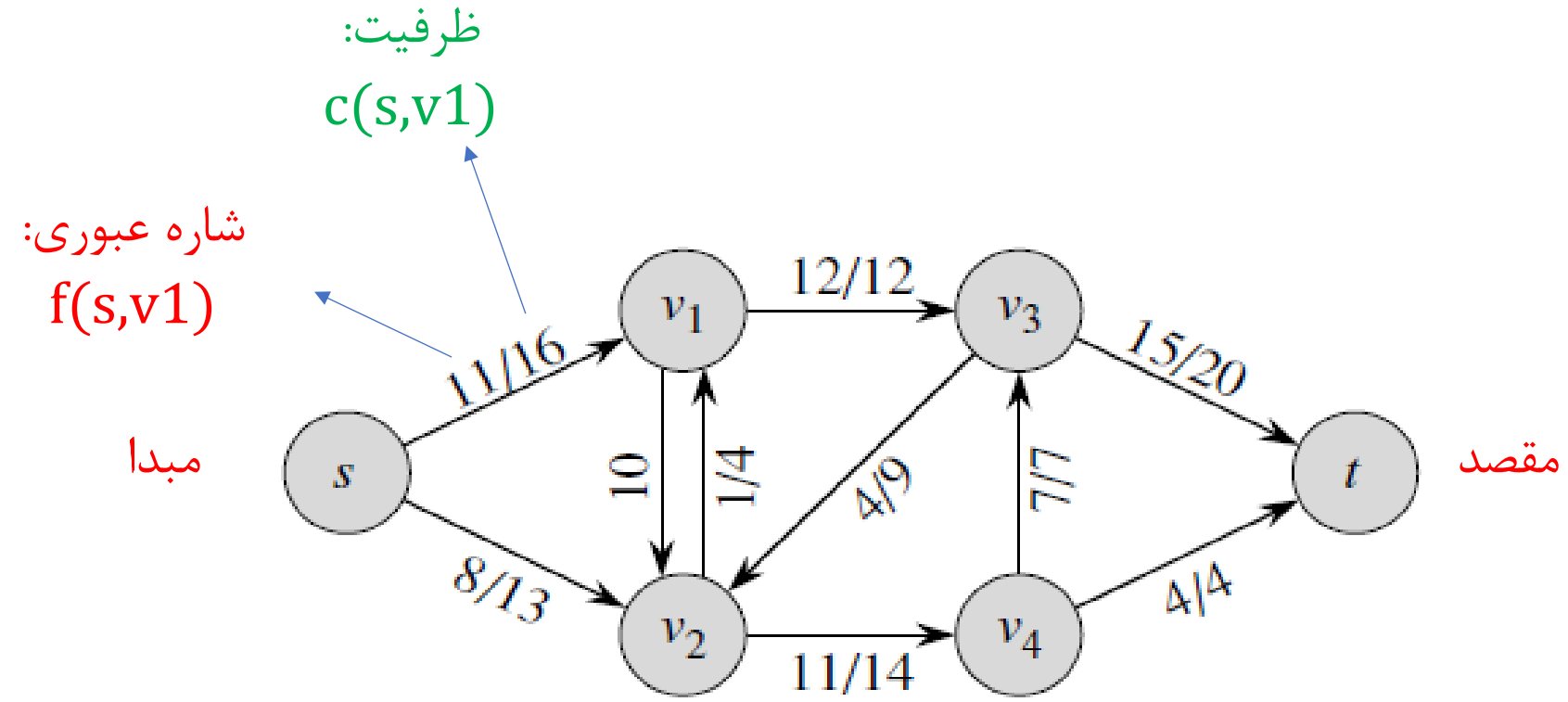


مقصد

مقدار شار f برابر است با:

$$|f| = f(s, v1) + f(s, v2) \\ = 11 + 8 = 19$$

✓ می توان درستی سه ویژگی، محدودیت ظرفیت، تقارن مورب و بقاء شار را در شبکه شار داده شده بررسی کرد.

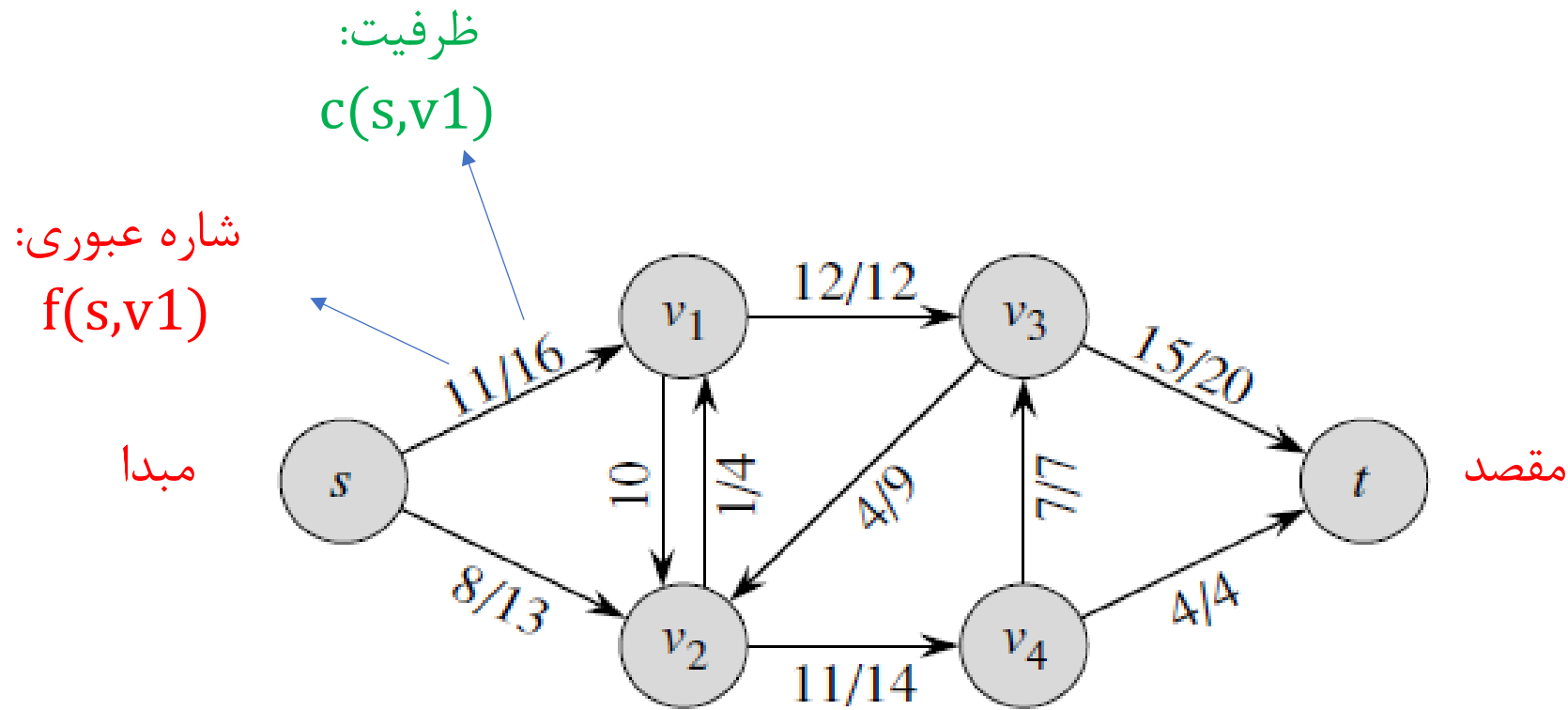


✓ بررسی بقاء شار برای راس $v3$

$$f(v3,v1)+f(v3,v2)+f(v3,v4)+f(v3,t)=-12+4-7+15=0$$

✓ بررسی بقاء شار برای راس $v1$

$$f(v1,s)+f(v1,v2)+f(v1,v3)=-11+-1+12=0$$



✓ بررسی بقاء شار به واسطه راس v_3

$$f(v_3, v_1) + f(v_3, v_2) + f(v_3, v_4) + f(v_3, t) = -12 + 4 - 7 + 15 = 0$$

$$\rightarrow -f(v_1, v_3) + f(v_3, v_2) - f(v_4, v_3) + f(v_3, t) = 0$$

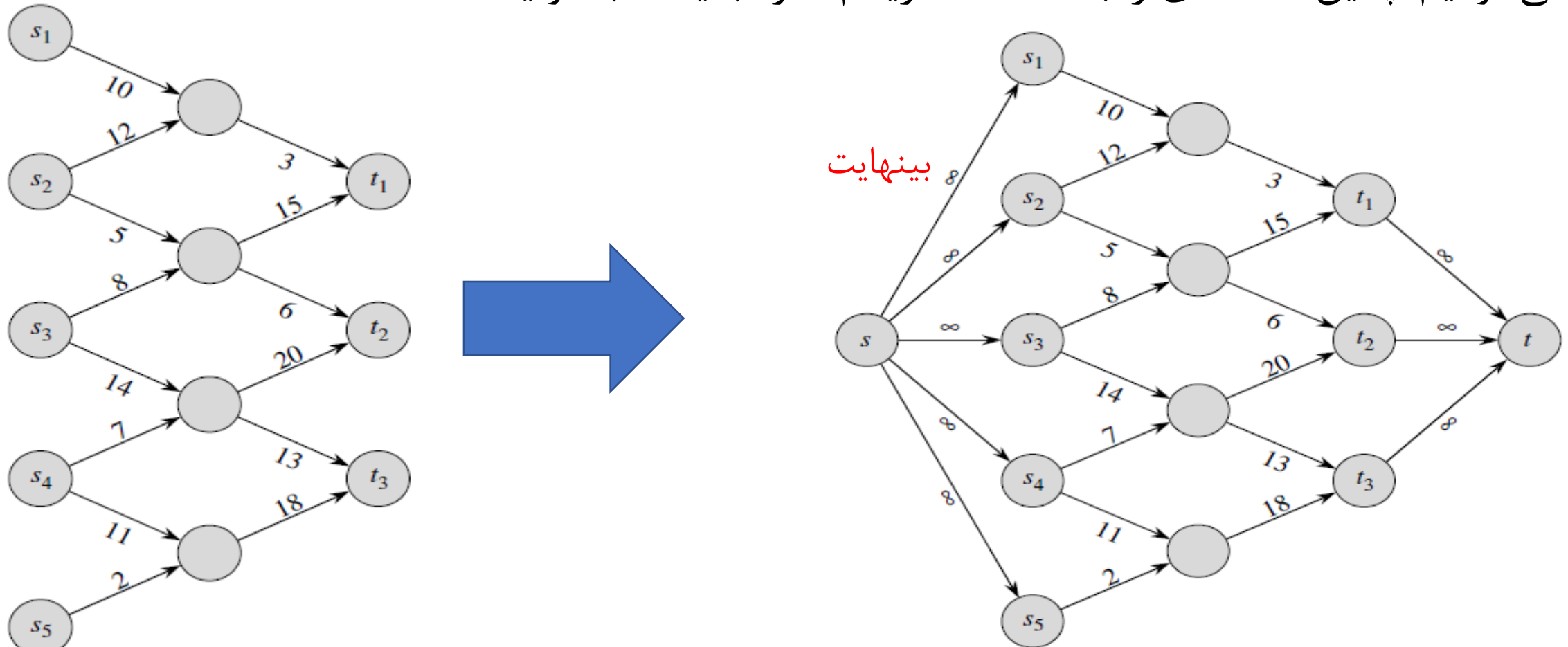
$$\rightarrow f(v_3, v_2) + f(v_3, t) = f(v_1, v_3) + f(v_4, v_3) = 19$$

شاره مثبت ورودی به همان راس = شاره مثبت خروجی از یک راس به غیر از مبدا و مقصد

شاره ورودی برابر است با شاره خروجی

✓ **تعریف:** مساله ماکزیمم شاره ممکن است بجای یک مبدا و یک مقصد، چندین مبدا و مقصد داشته باشد. برای مثال، شرکت حمل و نقل چندین کارخانه تولیدی و چندین انبار داشته باشد.

✓ می توانیم چنین مساله ای را به مساله ماکزیمم شاره با یک مبدا و یک مقصد تبدیل کنیم. **مثاله مثال ۱: بر**



✓ اگر X و Y مجموعه ای از رئوس یک شبکه شاره باشد آنگاه شاره مابین این دو مجموعه بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$$

✓ محدودیت بقاء شاره می تواند بصورت زیر بازتعریف شود: برای همه $u \in V - \{s, t\}$

$$f(u, V) = 0$$

✓ **لم ۱:** فرض کنید f یک شاره در شبکه $G=(V,E)$ باشد آنگاه تساوی های زیر برقرارند:

۱- برای همه $X \subseteq V$ داریم: $f(X,X)=0$

۲- برای همه $X,Y \subseteq V$ داریم: $f(X,Y)=-f(Y,X)$

۳- برای همه $X,Y,Z \subseteq V$ با شرط $X \cap Y = \emptyset$ داریم:

$$f(Z,X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y) \quad , \quad f(X \cup Y,Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

✓ **سوال:** ثابت کنید که مقدار شار f برابر است با

$$|f| = f(V,t) \quad \text{مجموع کل شار ورودی به مقصد}$$

جواب:

قبلا این تساوی را داشتیم.

$$|f| = f(s, V)$$

$$= f(V-(V-s), V)$$

$$= f(V,V) - f(V-s,V)$$

$$= 0 - f(V-s,V) = -f(V-s,V)$$

$$= f(V,V-s) = f(V, (V-s-t)+t)$$

$$= f(V,V-s-t) + f(V,t)$$

$$= 0 + f(V,t) = f(V,t)$$

طبق قسمت ۳ لم ۱

طبق قسمت ۱ لم ۱

طبق قسمت ۲ لم ۱

طبق قسمت ۳ لم ۱

طبق بقاء شار

✓ شبکه های باقیمانده (Residual networks): در یک شبکه شار $G=(V,E)$ و شار f ، شبکه باقیمانده از یالهایی تشکیل شده است که می توانند شار بیشتری را بپذیرند.

✓ میزان شار اضافی که می توانیم از راس u به راس v قبل از بیشتر شدن از ظرفیت $c(u,v)$ وارد کنیم را ظرفیت باقیمانده یال (u,v) می گویند که با فرمول زیر بدست می آید:

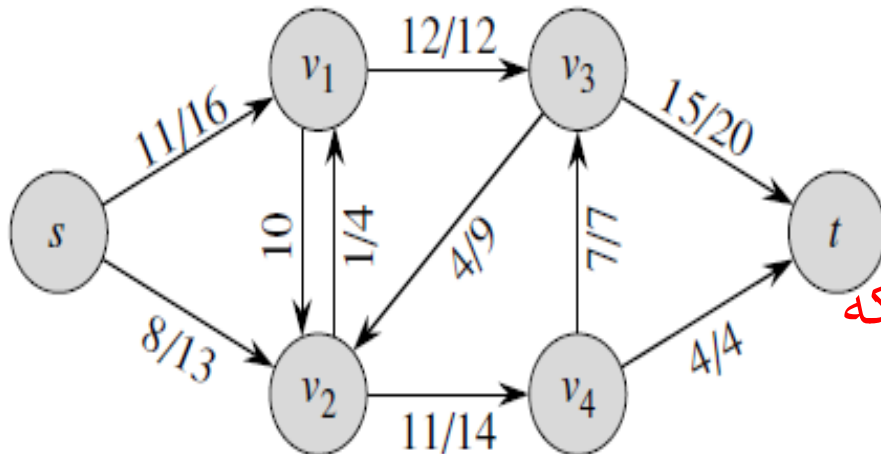
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

✓ مثال: در شبکه شار زیر ظرفیت باقیمانده چند یال محاسبه شده است:

$$c_f(s,v_1) = c(s,v_1) - f(s,v_1) = 16 - 11 = 5$$

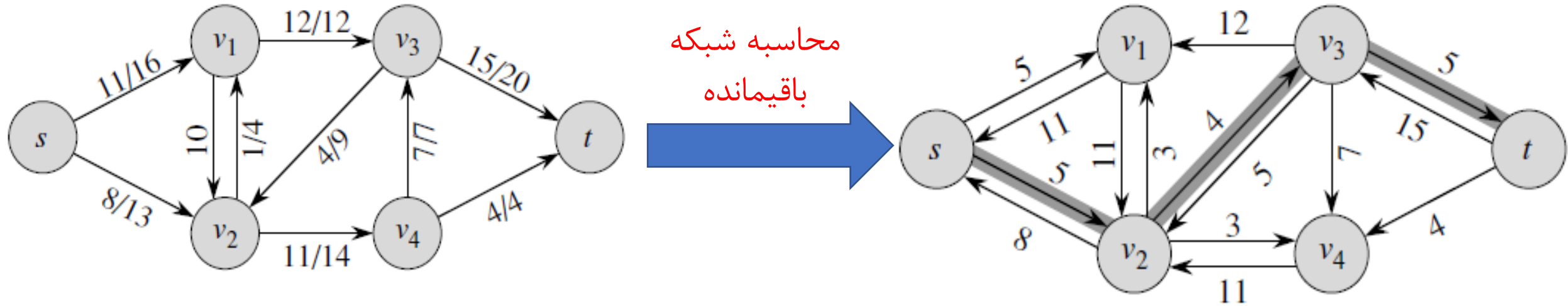
$$c_f(v_1,v_3) = c(v_1,v_3) - f(v_1,v_3) = 12 - 12 = 0$$

$$c_f(v_1,v_2) = c(v_1,v_2) - f(v_1,v_2) = 10 - (-1) = 11$$

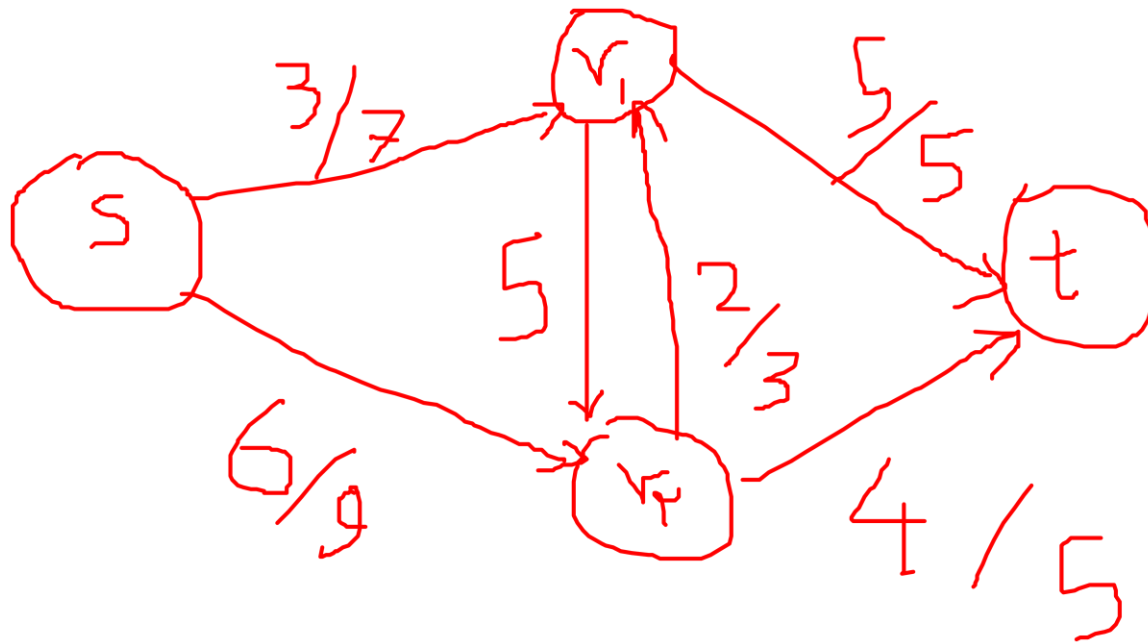


در واقع، مقدار شار باقیمانده از راس v_1 به راس v_2 برابر ۱۱ است که مقدار ۱ آن برای حذف شار یک واحدی v_2 به v_1 بکار می رود و مقدار ۱۰ آن برای شار ۱۰ واحدی از v_1 به v_2 بکار می رود.

✓ کار در کلاس: شبکه باقیمانده (G_f) مربوط به شبکه شاره زیر را رسم کنید.



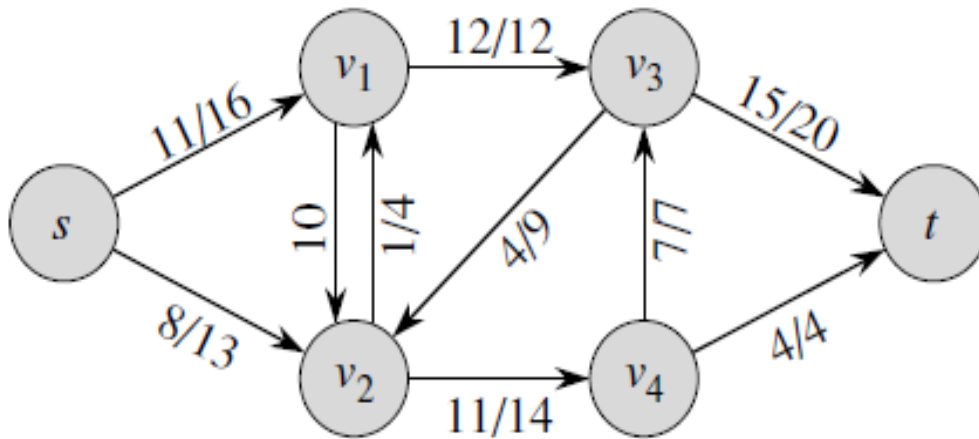
✓ کار در کلاس: شبکه باقیمانده (G_f) مربوط به شبکه شاره زیر را رسم کنید.



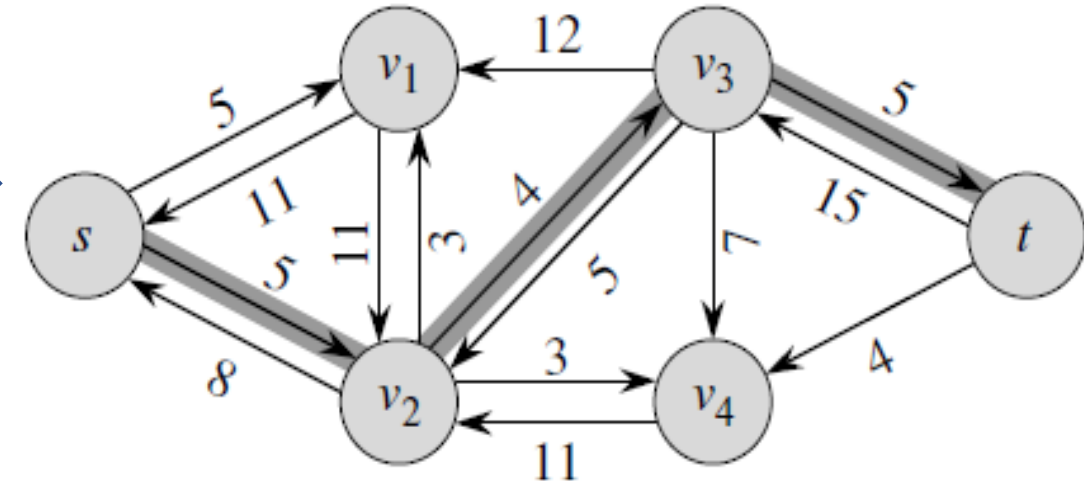
✓ **مسیرهای تکمیلی یا افزایشی (Augmenting paths):** در شبکه شار $G=(V,E)$ و شار f مفروض، مسیر تکمیلی p یک مسیر ساده از منبع s به مقصد t در شبکه باقیمانده G_f است.

✓ هر یال (u,v) روی مسیر تکمیلی p ، شار اضافی مثبت از u به v را می پذیرد بدون اینکه از محدودیت ظرفیت یال تخطی کند.

✓ مسیر سایه زده شده در شکل زیر یک مسیر تکمیلی است.



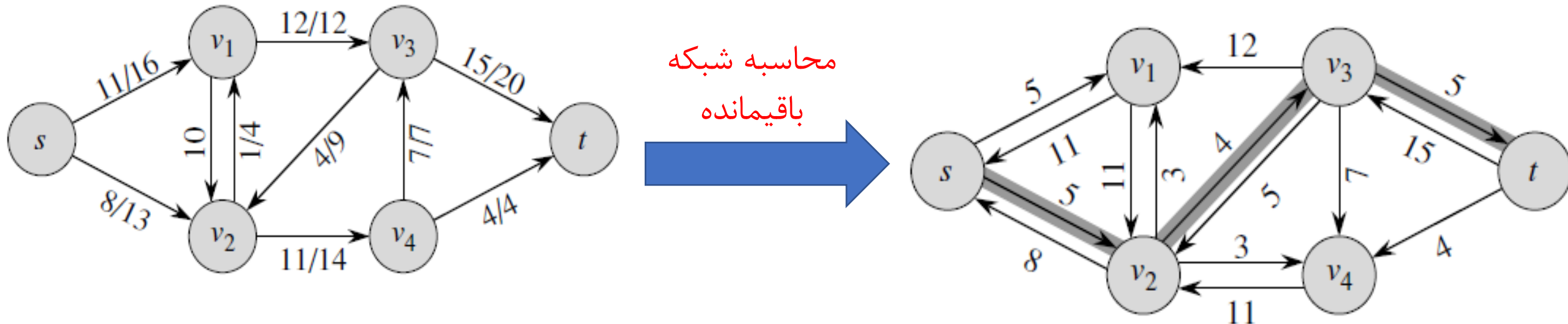
محاسبه شبکه
باقیمانده



✓ به بیشترین مقداری که به هر یال روی مسیر تکمیلی (p) و در شبکه شار می توان اضافه کرد را **ظرفیت باقیمانده p** (C_f) می گویند و برابر است با کوچکترین مقدار ظرفیت باقیمانده روی مسیر تکمیلی p :

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : \text{یال } u \text{ و } v \text{ روی مسیر پی قرار دارد}\}$$

مثال: در شکل زیر، ظرفیت باقیمانده p (C_f) برابر است با ۴ یعنی می توان حداکثر ۴ واحد به شار یالهای موجود روی مسیر p یعنی (s,v_2) و (v_2,v_3) و (v_3,t) اضافه کرد.



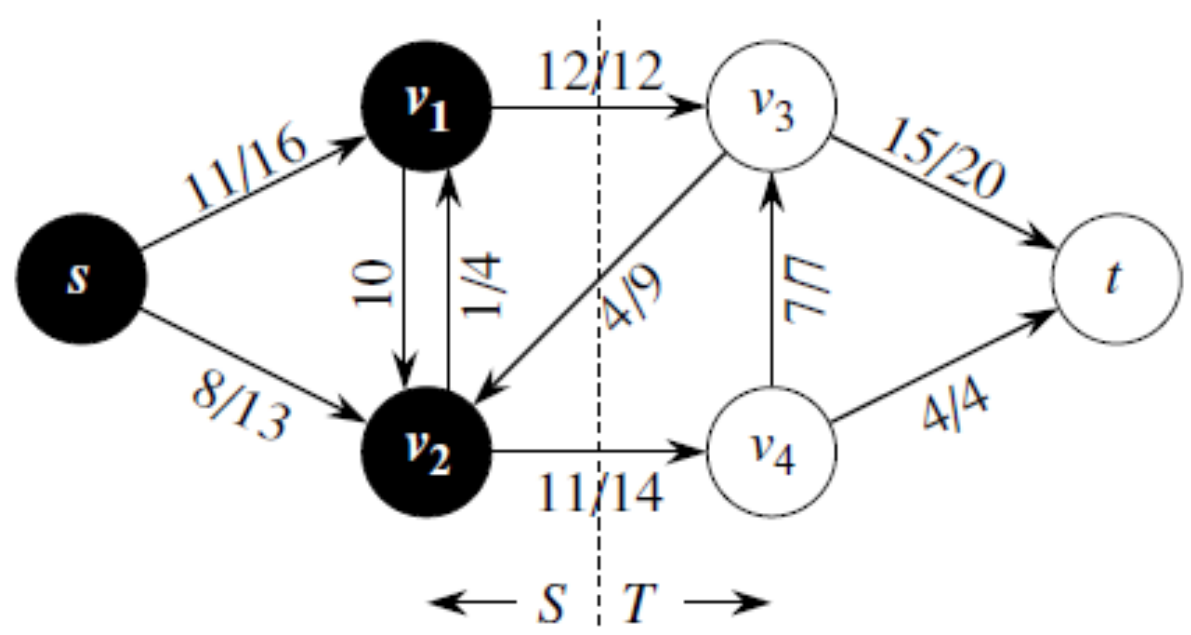
✓ **لم ۲:** فرض کنید f یک شار در شبکه $G=(V,E)$ و p یک مسیر تکمیلی در شبکه باقیمانده G_f باشد تابع $f_p: V \times V \rightarrow R$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{اگر یال } (u,v) \text{ روی } p \text{ باشد} \\ -c_f(p) & \text{اگر یال } (v,u) \text{ روی } p \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آنگاه f_p یک شار در G_f با مقدار $|f_p|=c_f(p)$ است.

✓ **نتیجه گیری:** تابع $f'=f+f_p$ یک شار با مقدار $|f'|=|f|+|f_p|$ برای شبکه شار G می باشد.

✓ **بریدگی های شبکه شاره (Cuts of flow network):** بریدگی (S,T) از شبکه شاره $G=(V,E)$ یک افراز از V به داخل S است و $T=V-S$ بطوریکه $s \in S$ و $t \in T$.



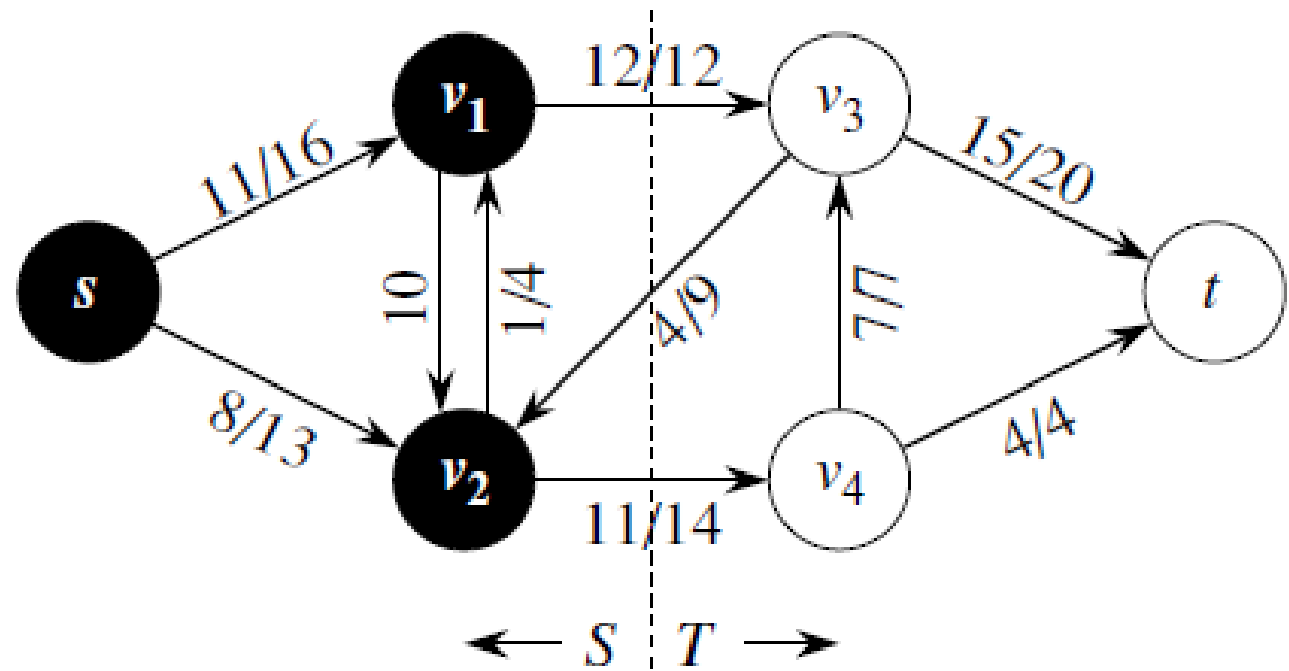
✓ **شاره خالص در راستای بریدگی (S,T) بصورت $f(S,T)$ و ظرفیت بریدگی (S,T) بصورت $c(S,T)$ تعریف می شود.**

$$f(S,T) = f(v_1,v_3)+f(v_2,v_3)+f(v_2,v_4) = 12+(-4)+11=19$$

$$f(S,T)=f(s,V)=f(V,t)=|f|$$
 ✓

$$c(S,T) = c(v_1,v_3)+c(v_2,v_3)+c(v_2,v_4) = 12+0+14=26$$

✓ بریدگی های شبکه شاره (Cuts of flow network): بریدگی (S,T) از شبکه شاره $G=(V,E)$ یک افزار از V به داخل S است و $T=V-S$ بطوریکه $s \in S$ و $t \in T$.

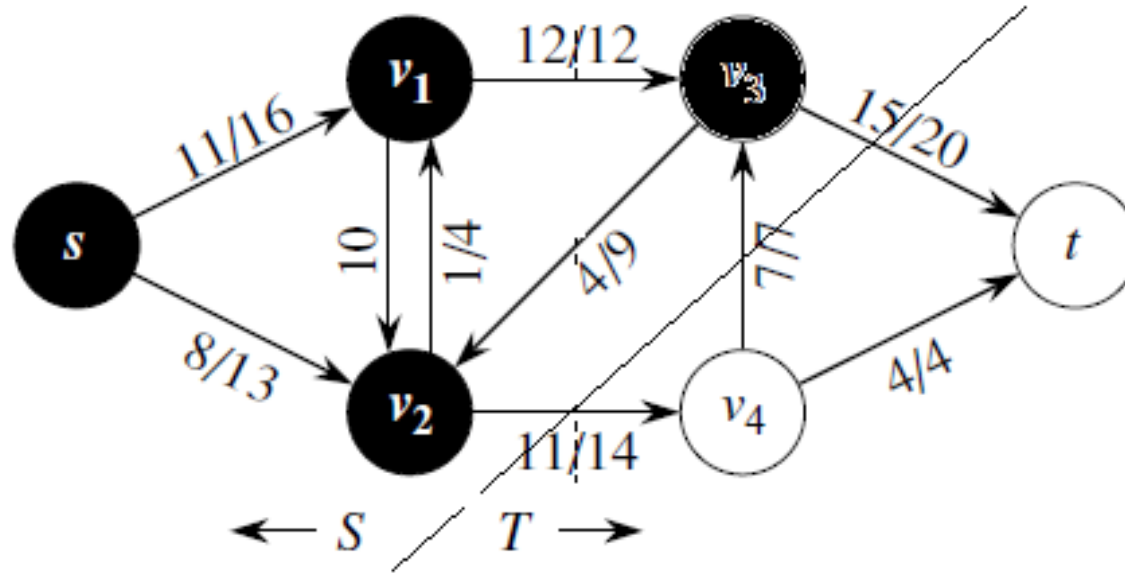


✓ شاره خالص در راستای بریدگی (S,T) بصورت $f(S,T)$ و ظرفیت بریدگی (S,T) بصورت $c(S,T)$ تعریف می شود.

$f(S,T) = f(v_1,v_3)+f(v_2,v_3)+f(v_2,v_4) = 12+(-4)+11=19$ $f(S,T)=f(s,V)=f(V,t)=|f|$ ✓

$c(S,T) = c(v_1,v_3)+c(v_2,v_3)+c(v_2,v_4) = 12+0+14=26$

✓ کار در کلاس: در شبکه شاره زیر مقادیر $f(S,T)$ و $c(S,T)$ را محاسبه کنید.



$$f(S,T) = f(v_3,t) + f(v_3,v_4) + f(v_2,v_4) = 15 + (-7) + 11 = 19$$

$$c(S,T) = c(v_3,t) + c(v_3,v_4) + c(v_2,v_4) = 20 + 0 + 14 = 34$$

✓ قضیه ماکزیمم-شاره-مینیمم-بریدگی (Max-flow min-cut theorem): اگر f یک شاره در شبکه $G=(V,E)$ با منبع s و مقصد t باشد آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱- f یک ماکزیمم شاره در G است.

۲- شبکه باقیمانده G_f شامل هیچ مسیر تکمیلی نیست.

۳- برای بعضی بریدگی (S,T) از G داریم: $|f|=c(S,T)$

✓ الگوریتم Ford-Fulkerson

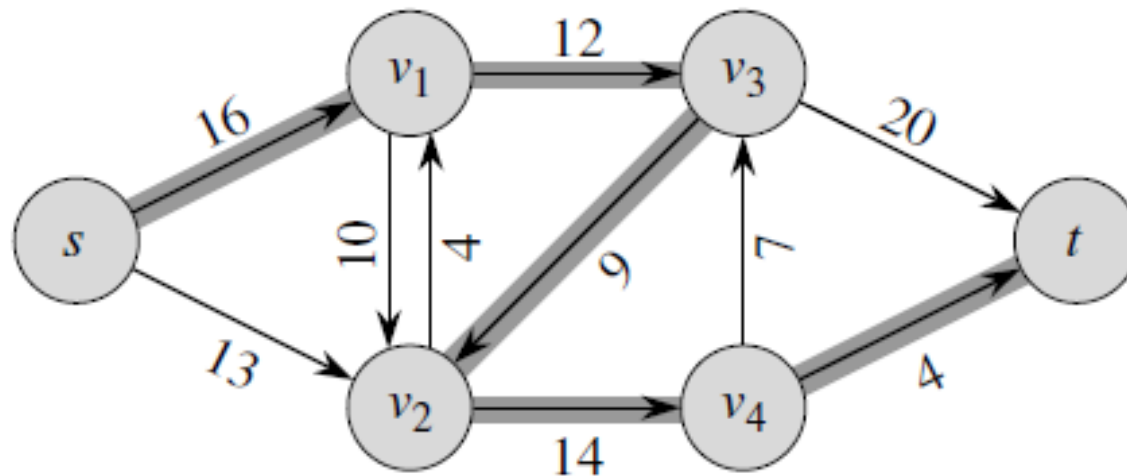
در هر تکرار، مسیر تکمیلی p را در گراف باقیمانده یافته و شاره f روی هر یک از یالهای p را به اندازه ظرفیت باقیمانده $c_f(p)$ افزایش می دهد. الگوریتم موقعی تمام می شود که هیچ مسیر تکمیلی در گراف باقیمانده یافت نشود.

FORD-FULKERSON(G, s, t)

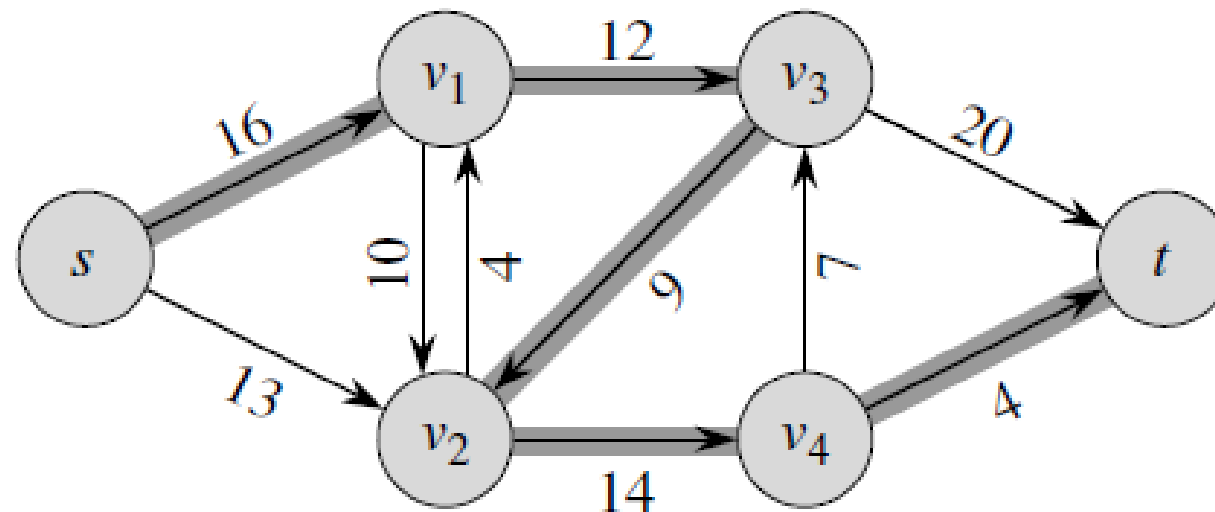
```
1  for each edge  $(u, v) \in E[G]$ 
2      do  $f[u, v] \leftarrow 0$ 
3       $f[v, u] \leftarrow 0$ 
4  while there exists a path  $p$  from  $s$  to  $t$  in the residual network  $G_f$ 
5      do  $c_f(p) \leftarrow \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$ 
6      for each edge  $(u, v)$  in  $p$ 
7          do  $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$ 
8           $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$ 
```

خطوط ۱-۳ زمان $O(E)$ را صرف می کنند. اگر مقدار شاره بیشینه برابر f^* باشد حلقه while حداکثر $|f^*|$ بار تکرار می شد چون در بدترین حالت فقط یک واحد افزایش می یابد. داخل حلقه نیز $O(E)$ زمان می برد پس پیچیدگی این الگوریتم برابر $O(E|f^*|)$ می باشد.

✓ مثال: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید.

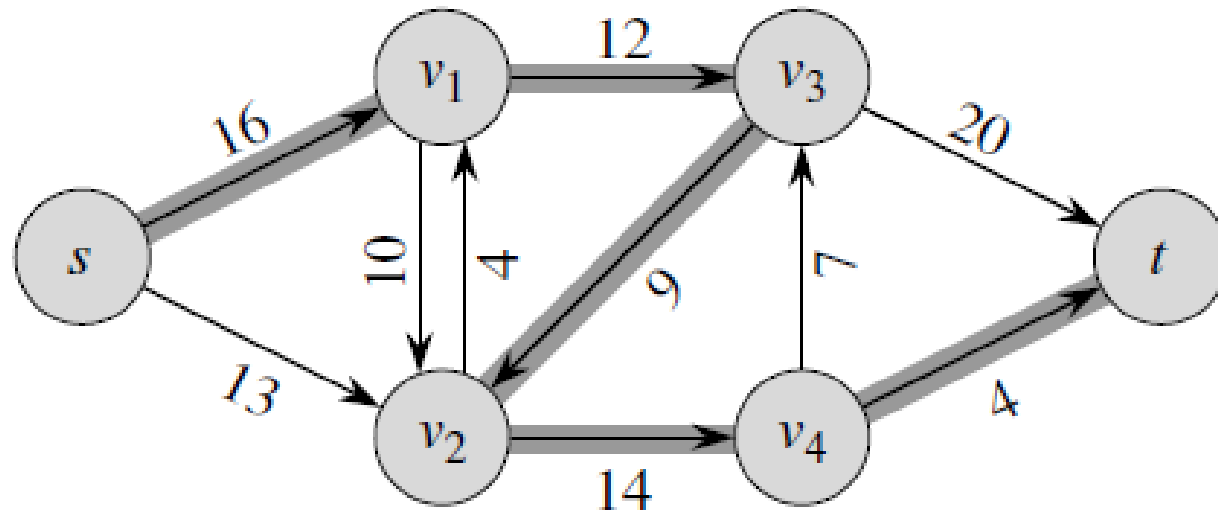


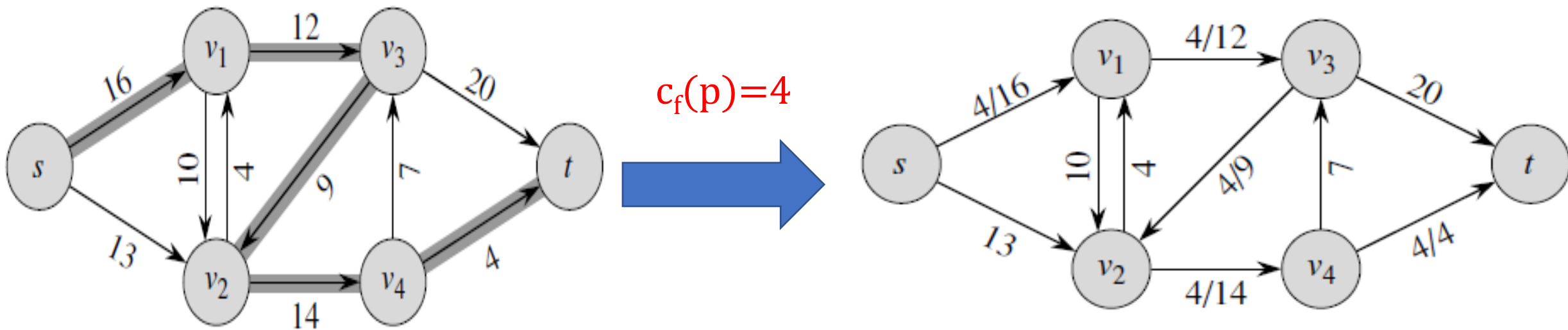
هر جفت راس برابر صفر

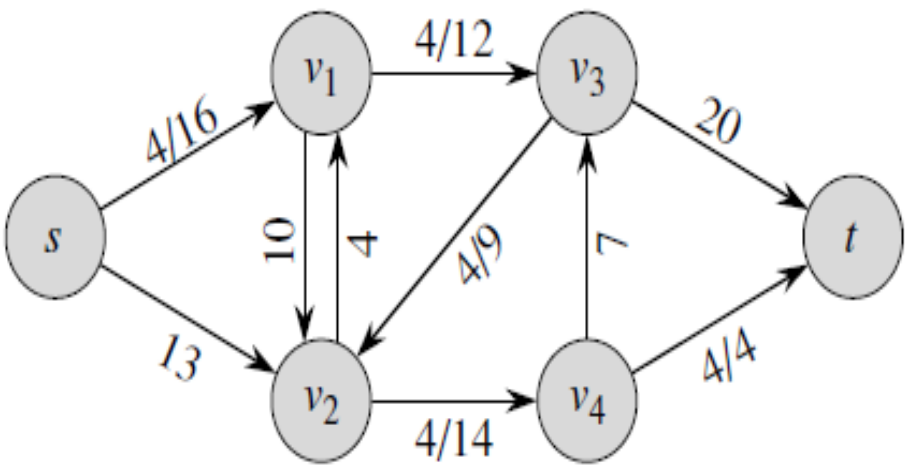


جواب: در ابتدا
قرار می دهیم.

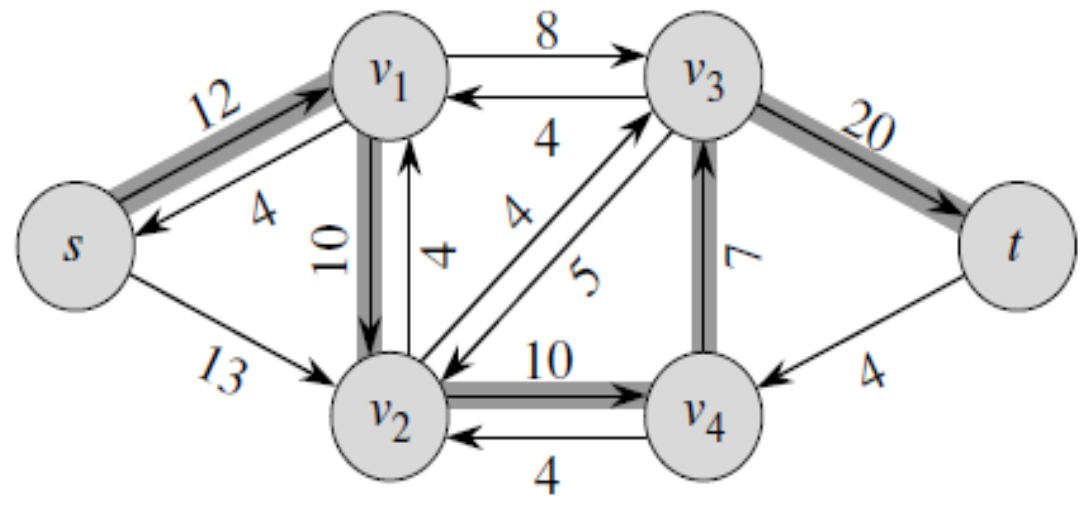
محاسبه شبکه باقیمانده
 $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

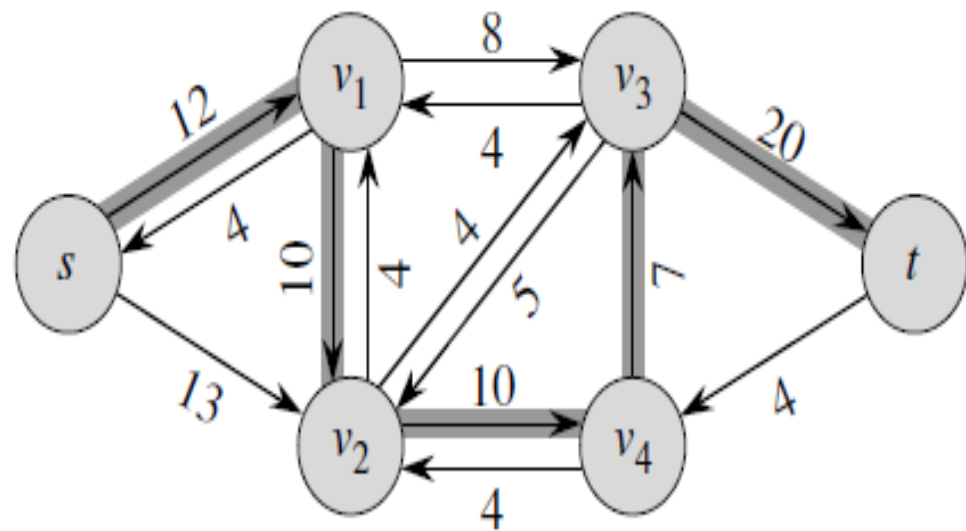





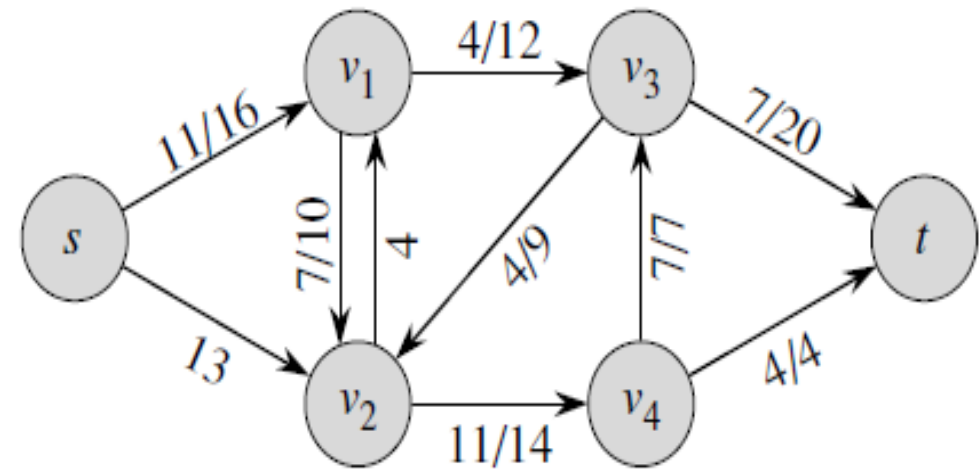


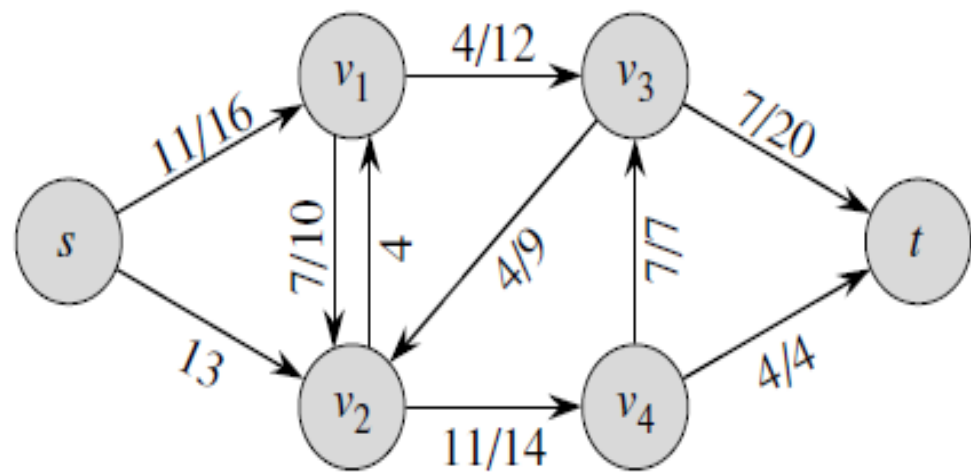
محاسبه شبکه
باقیمانده



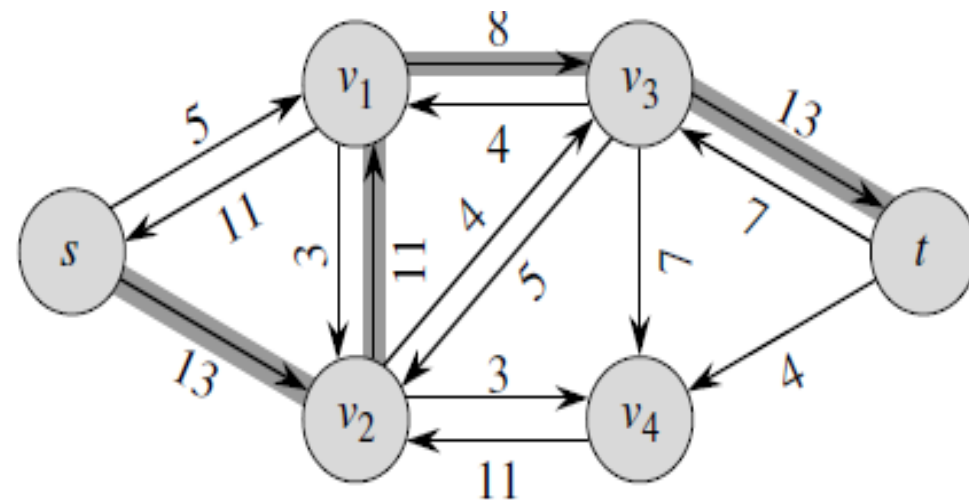


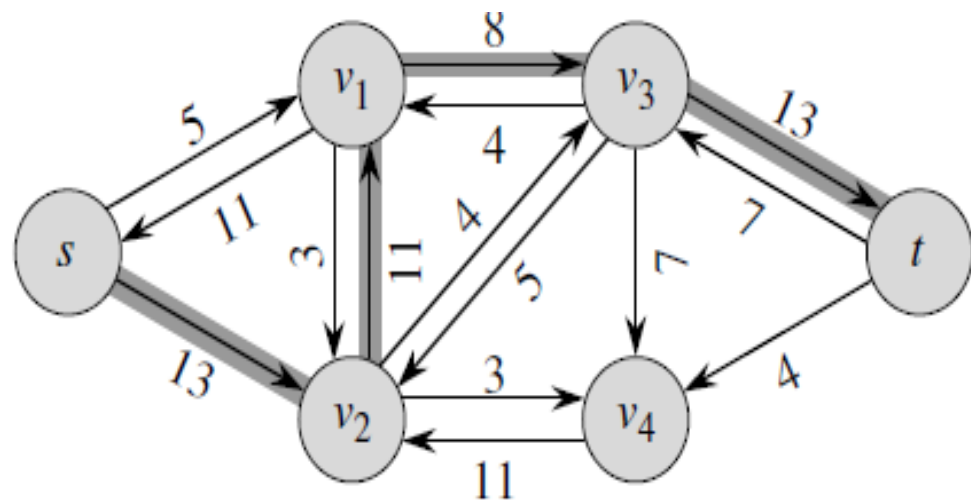
$c_f(p)=7$



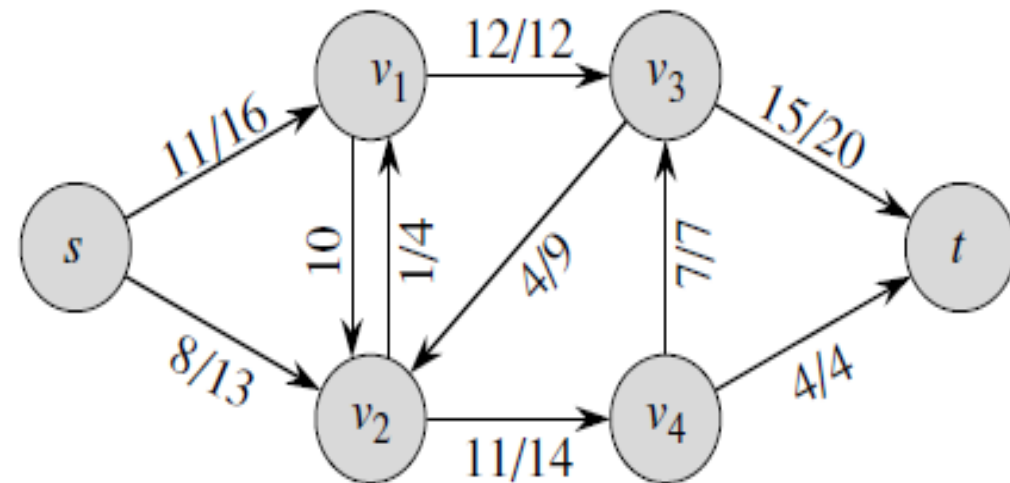


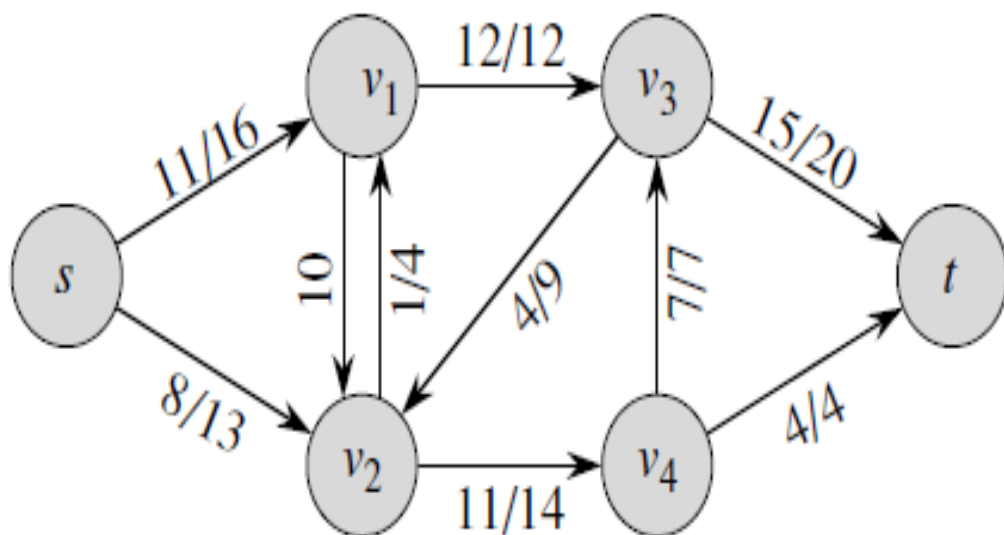
محاسبه شبکه
باقیمانده



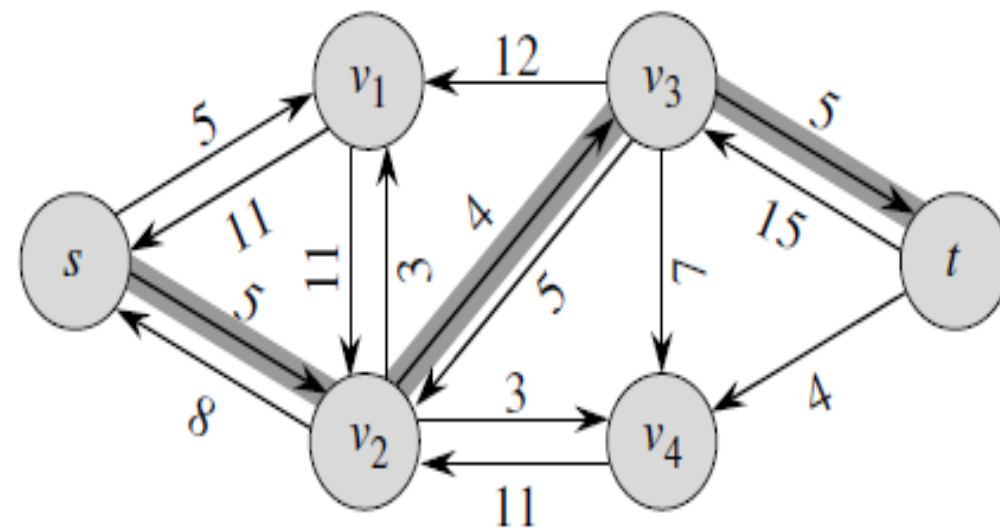


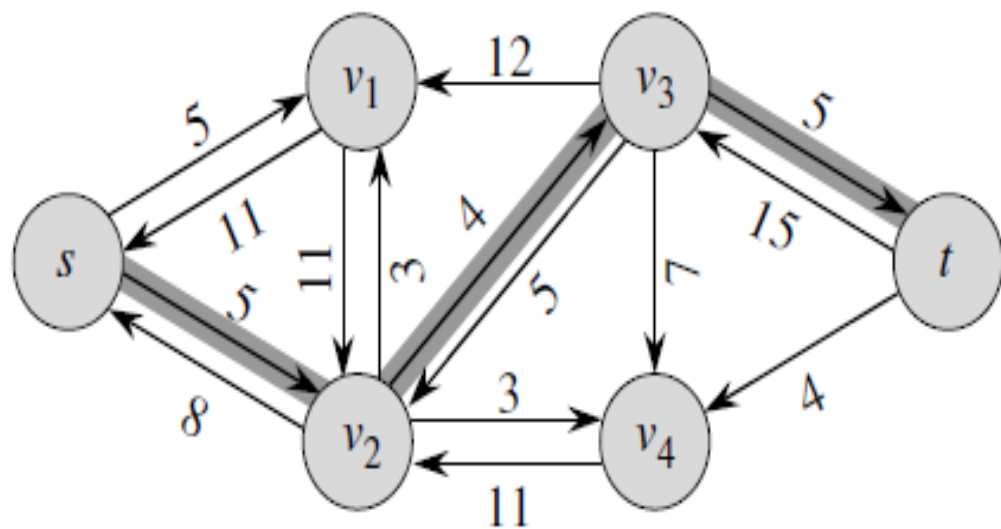
$$c_f(p)=8$$



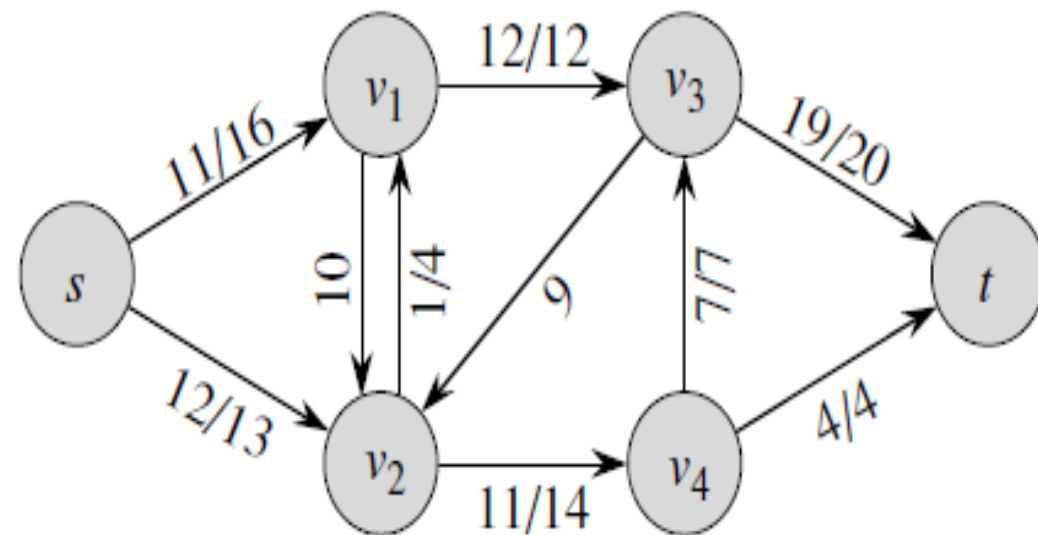


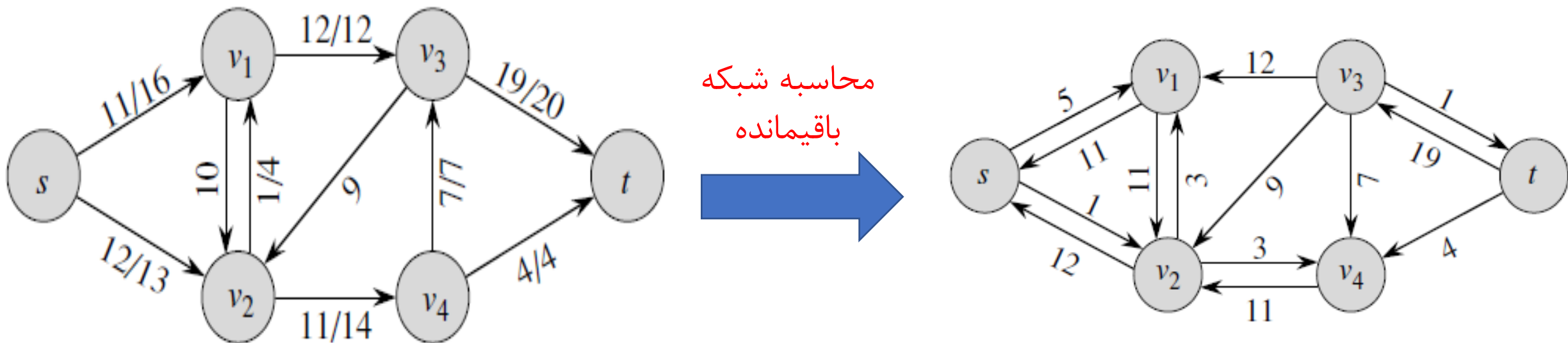
محاسبه شبکه
باقیمانده



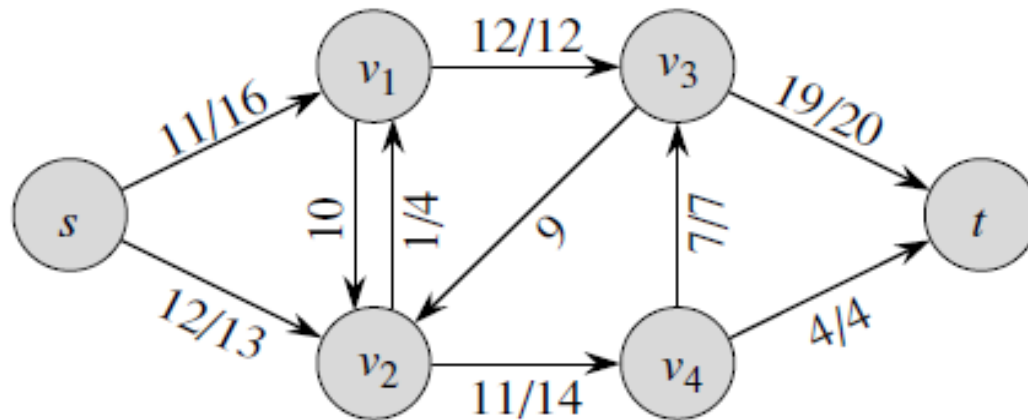


$$c_f(p)=4$$

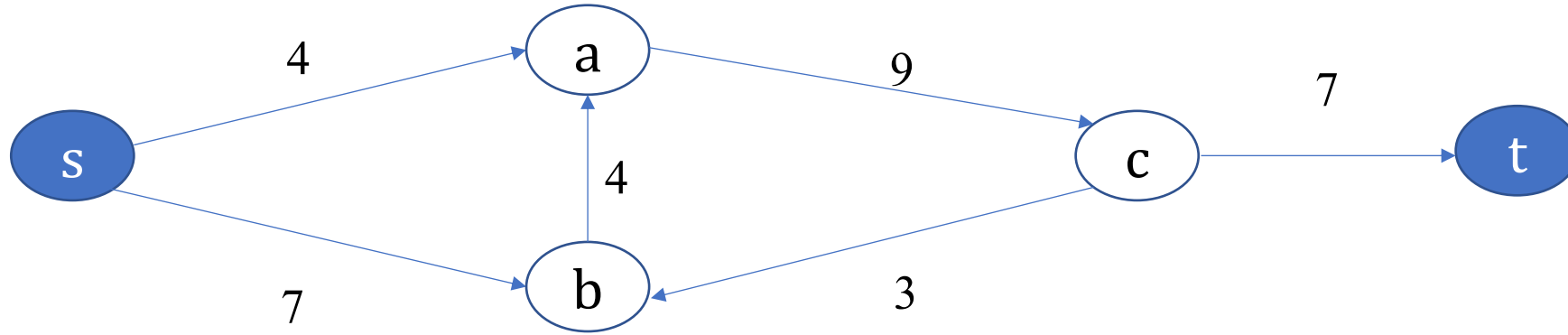




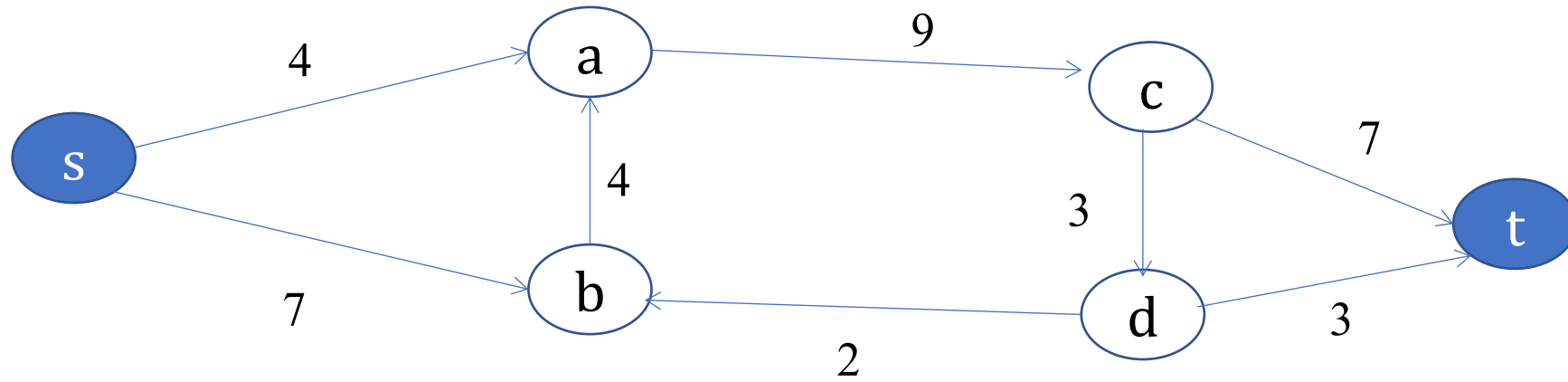
چون در شبکه باقیمانده هیچ مسیر تکمیلی وجود ندارد بنابراین الگوریتم به اتمام می رسد و جواب نهایی بصورت زیر می باشد:



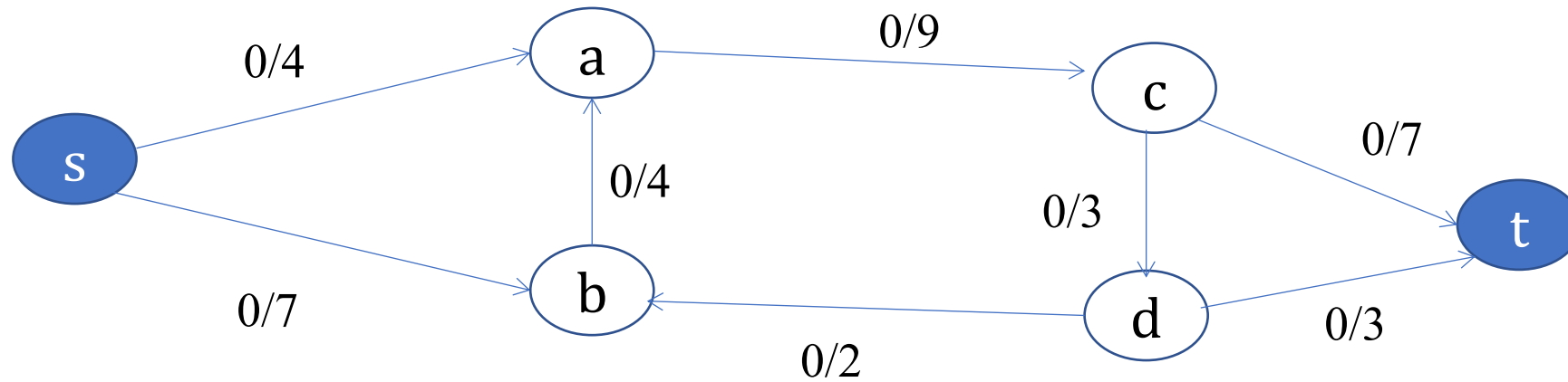
✓ کار در کلاس: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید.

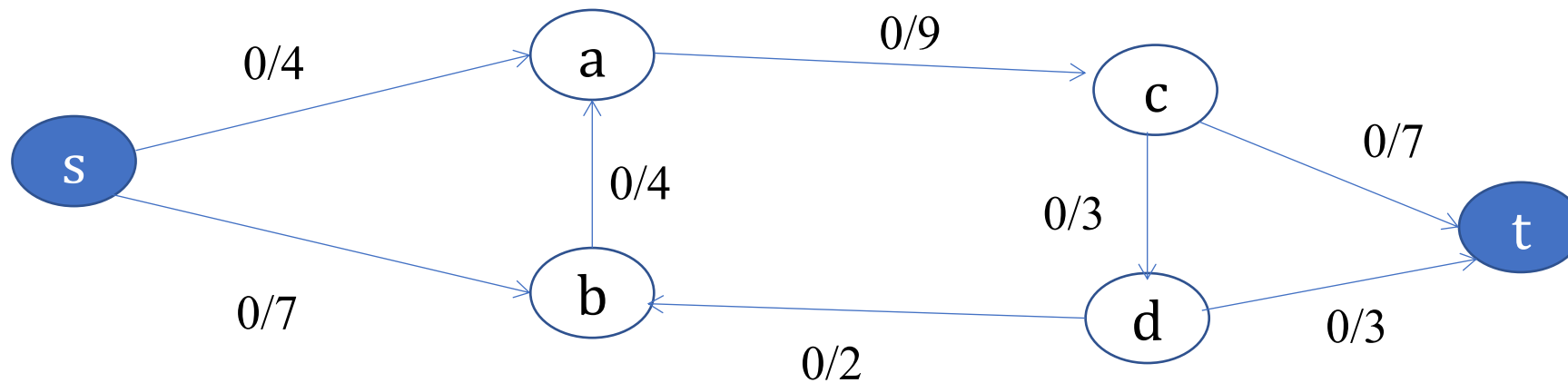


✓ کار در کلاس: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید



✓ Answer:

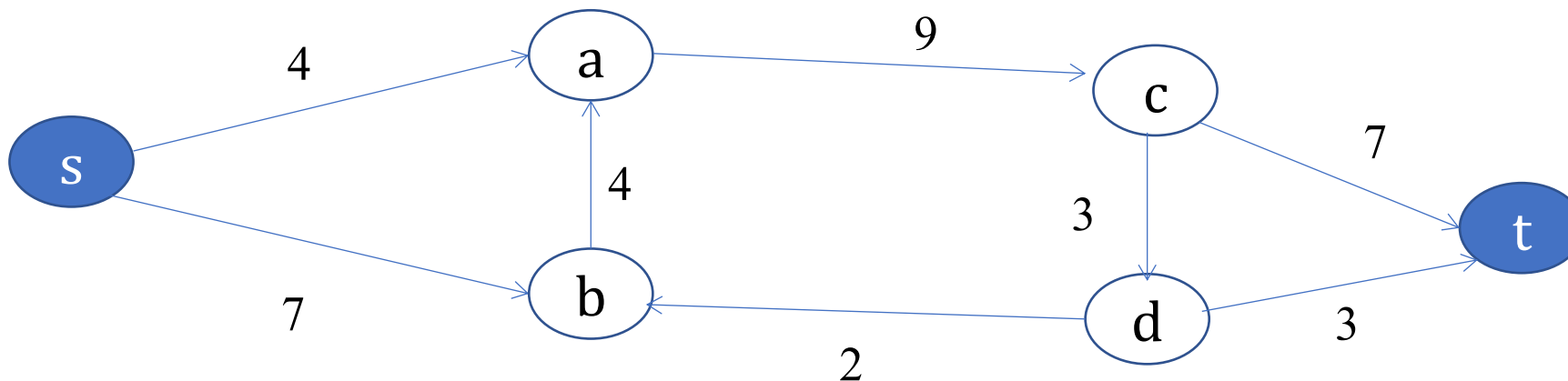


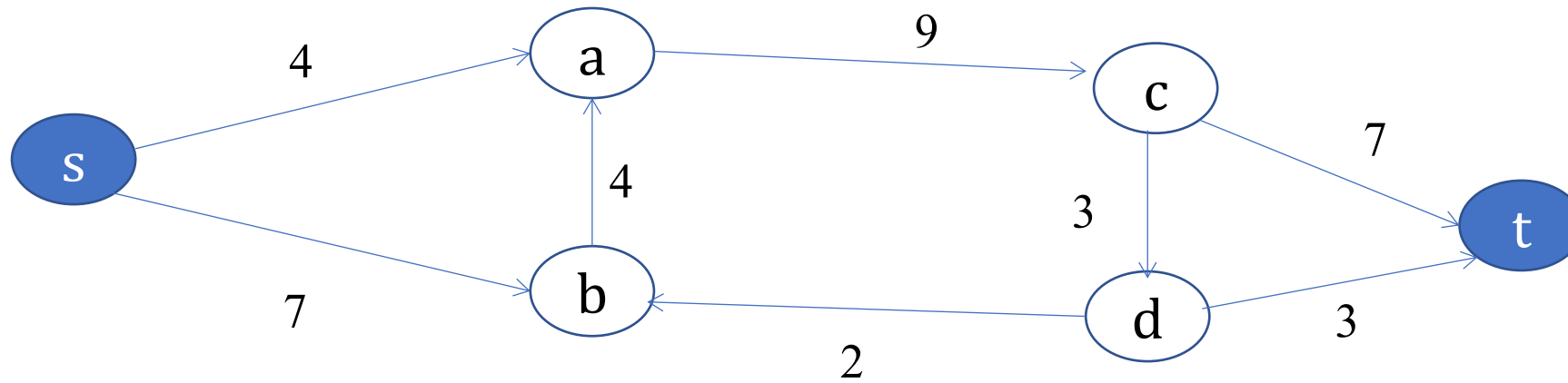


Finding the
residual network

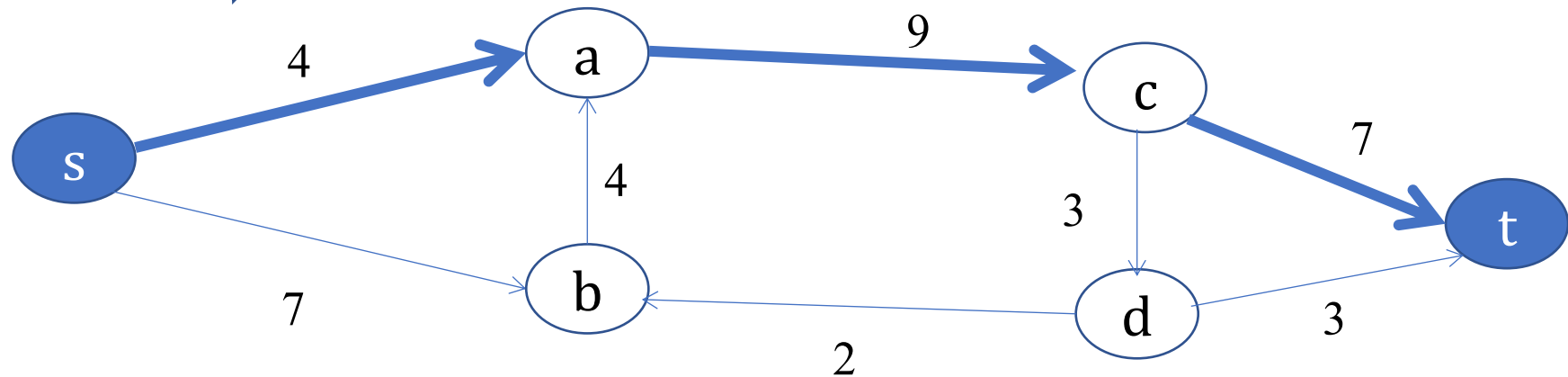


$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$



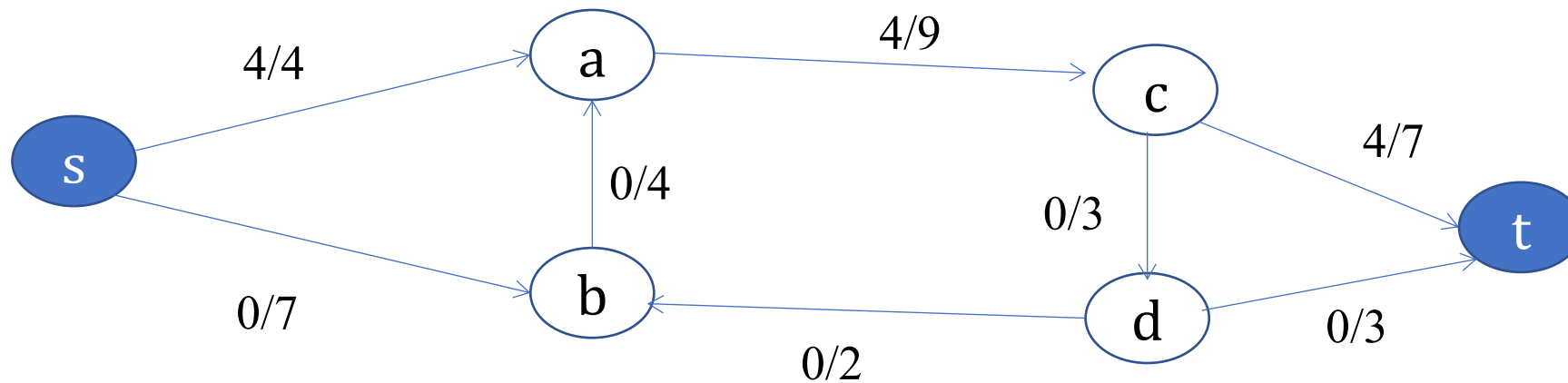


Finding an augmenting path
in the residual network



$$c_f(p)=4$$

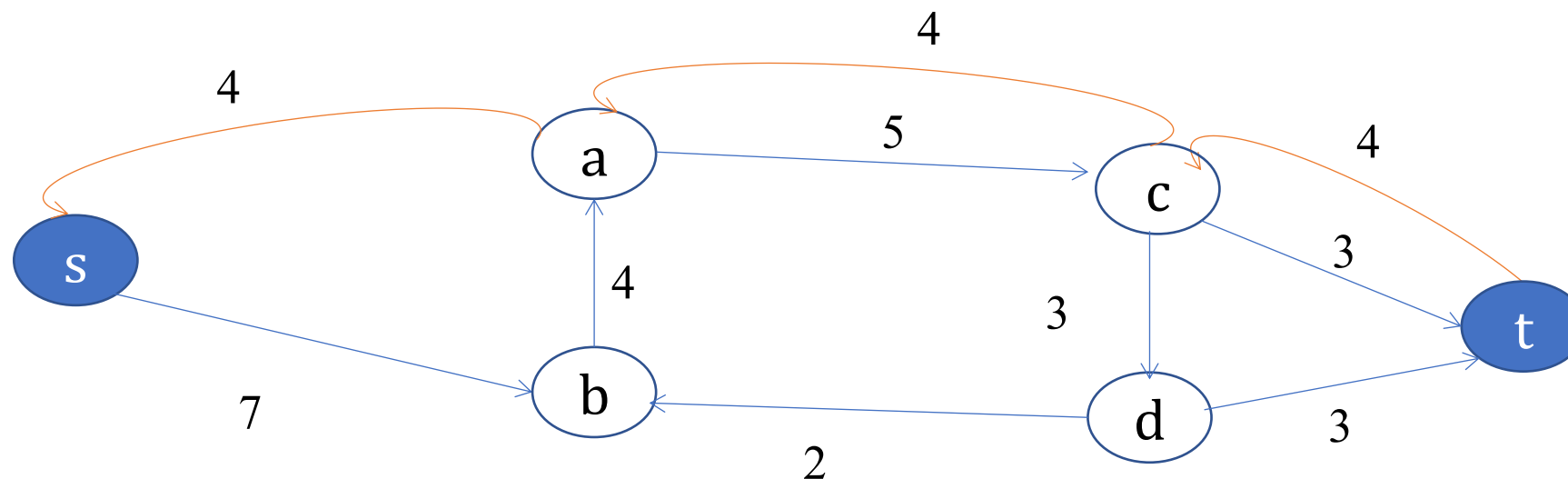


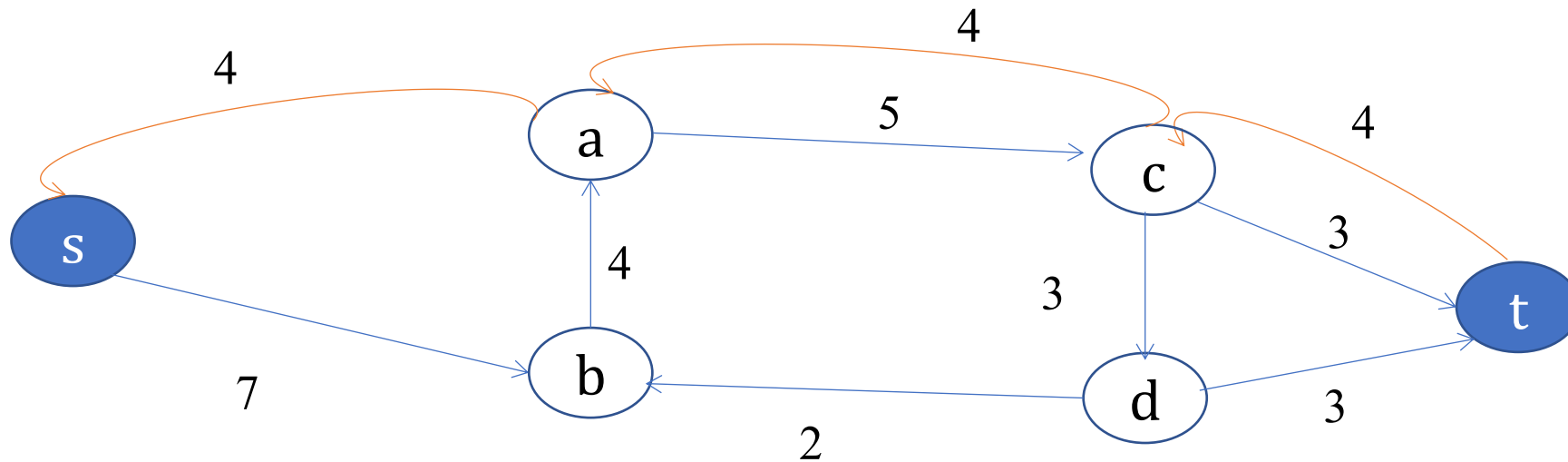


Finding the
residual network

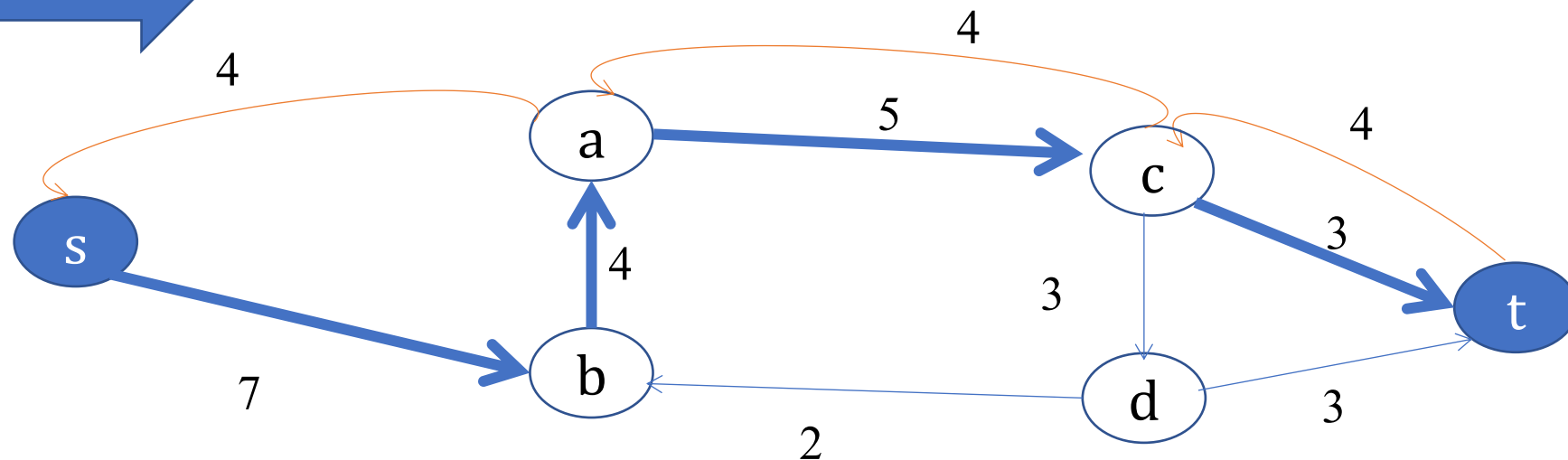
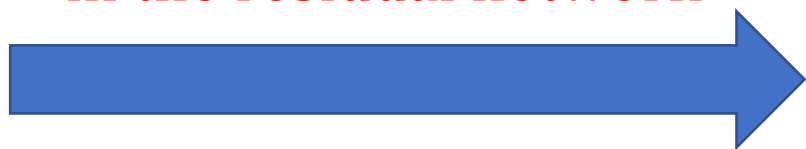
→

$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$



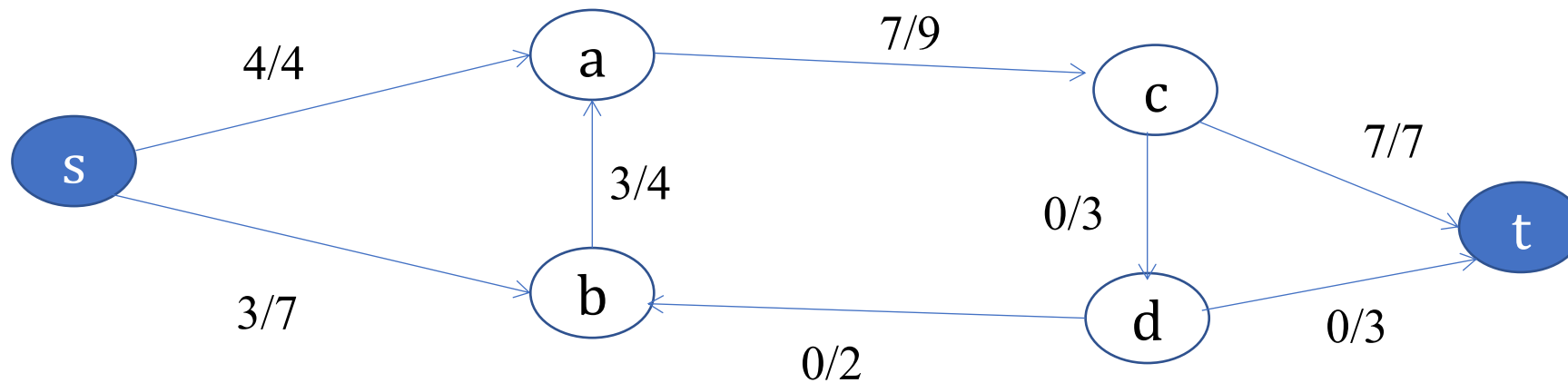


Finding an augmenting path
in the residual network



$$c_f(p)=3$$

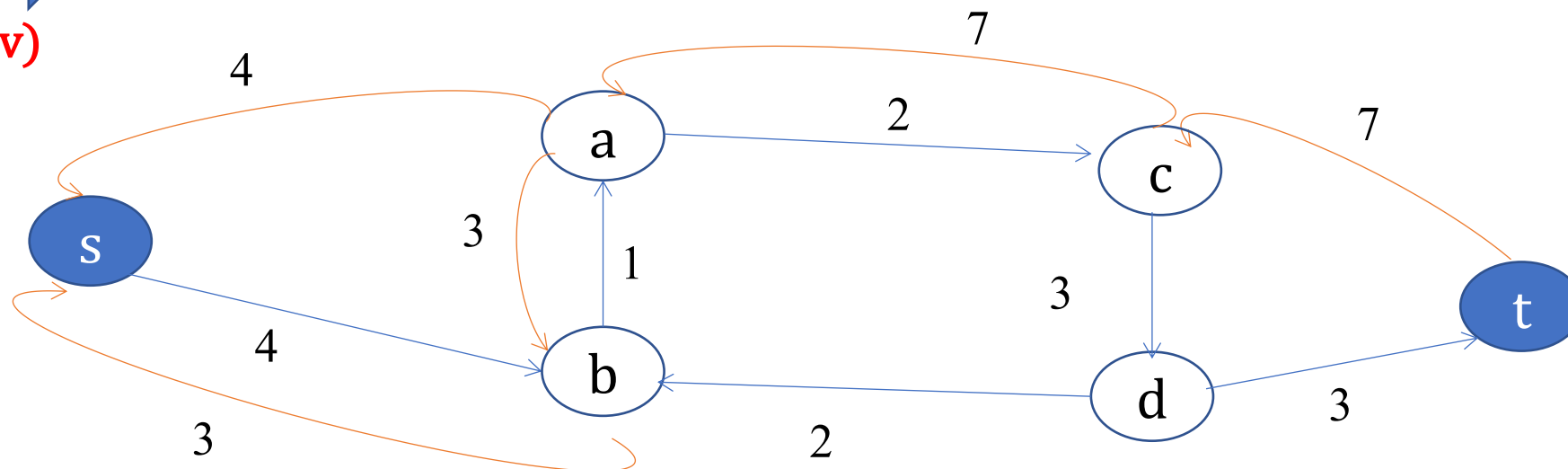


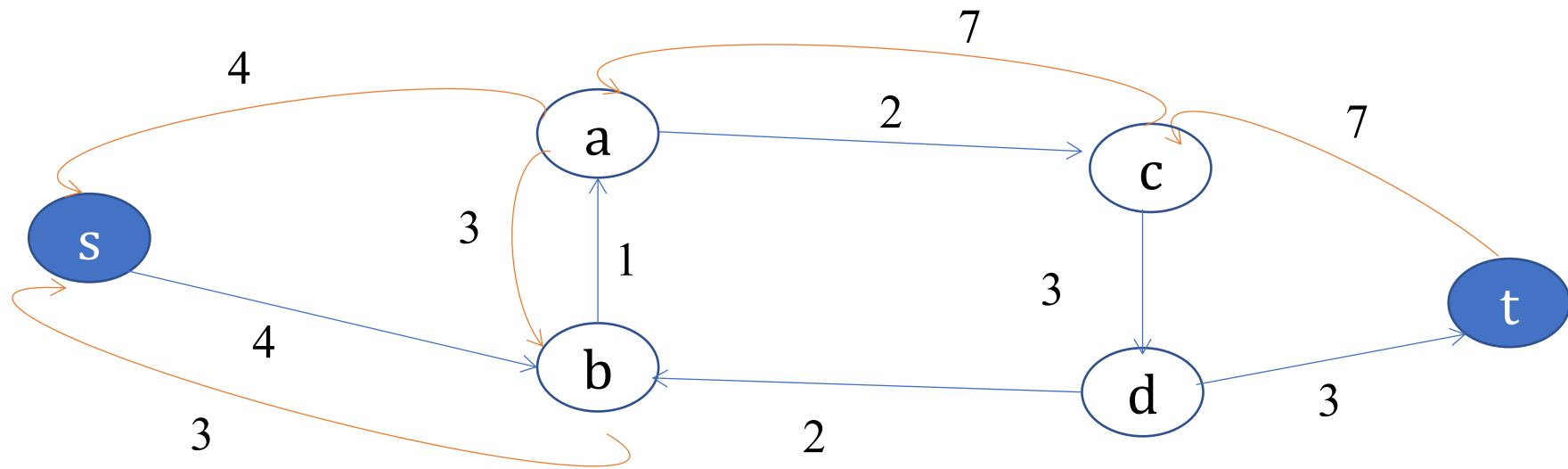


Finding the
residual network

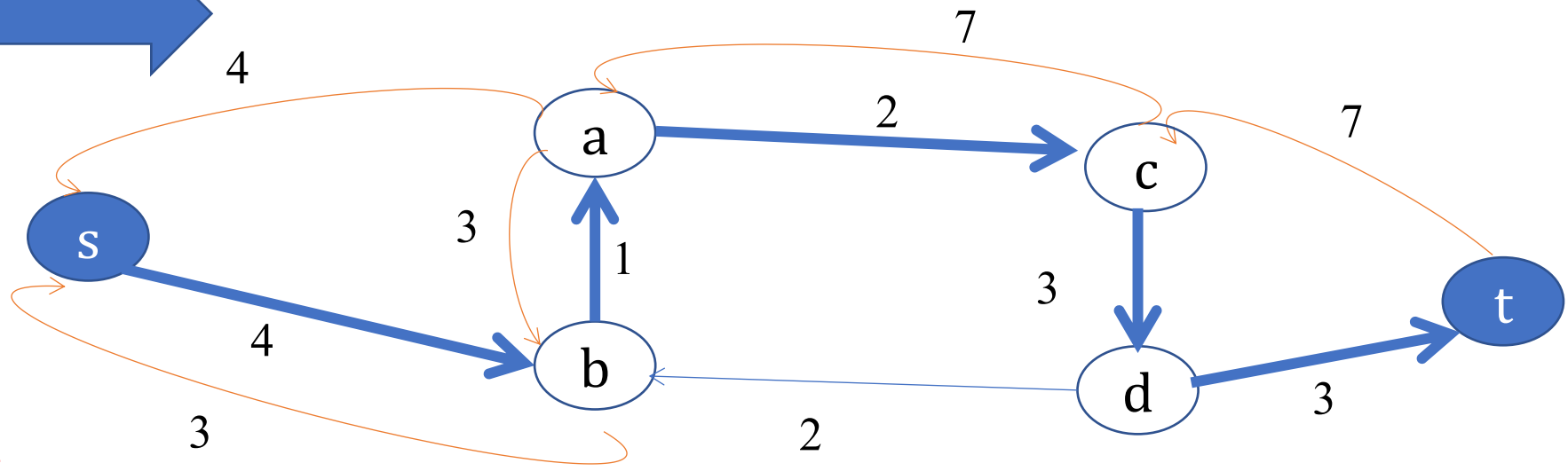


$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$



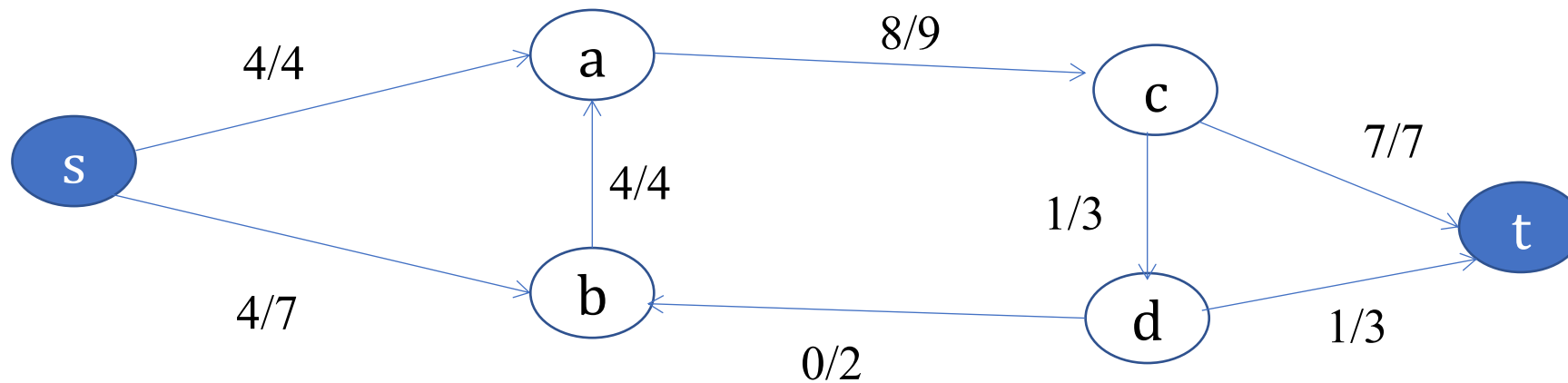


Finding an augmenting path
in the residual network



$$c_f(p)=1$$

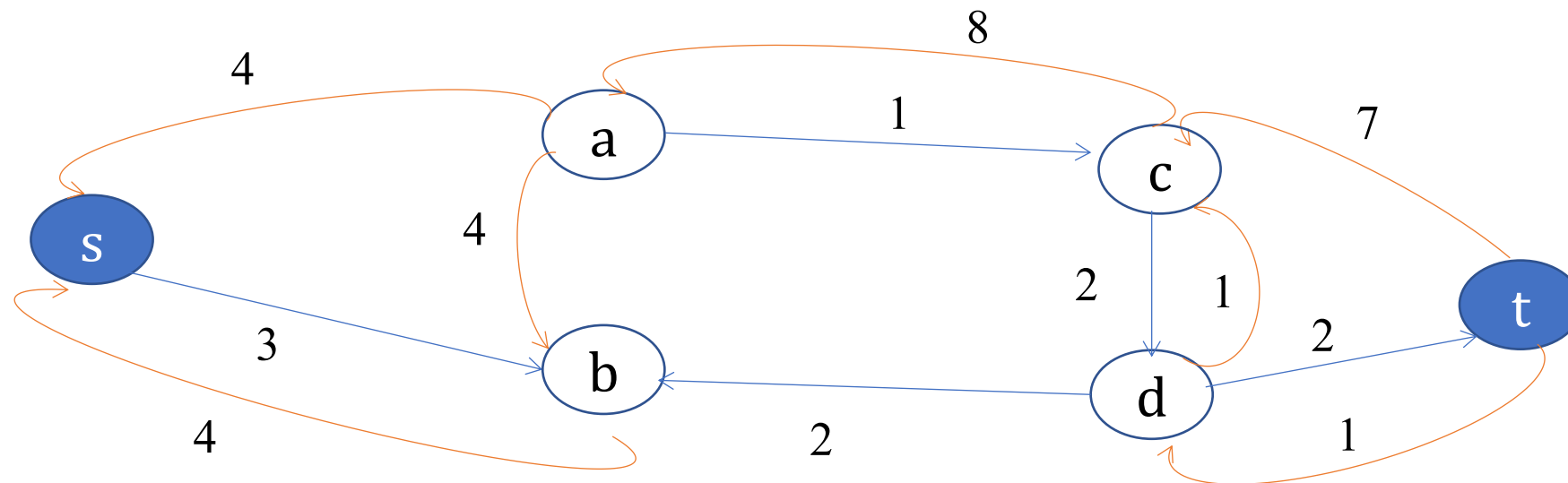


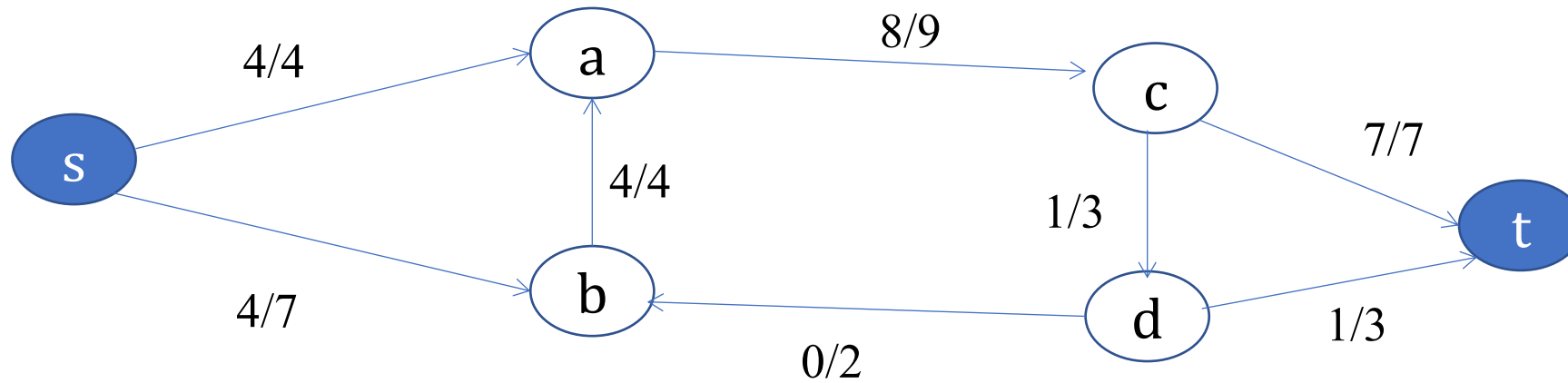


Finding the
residual network

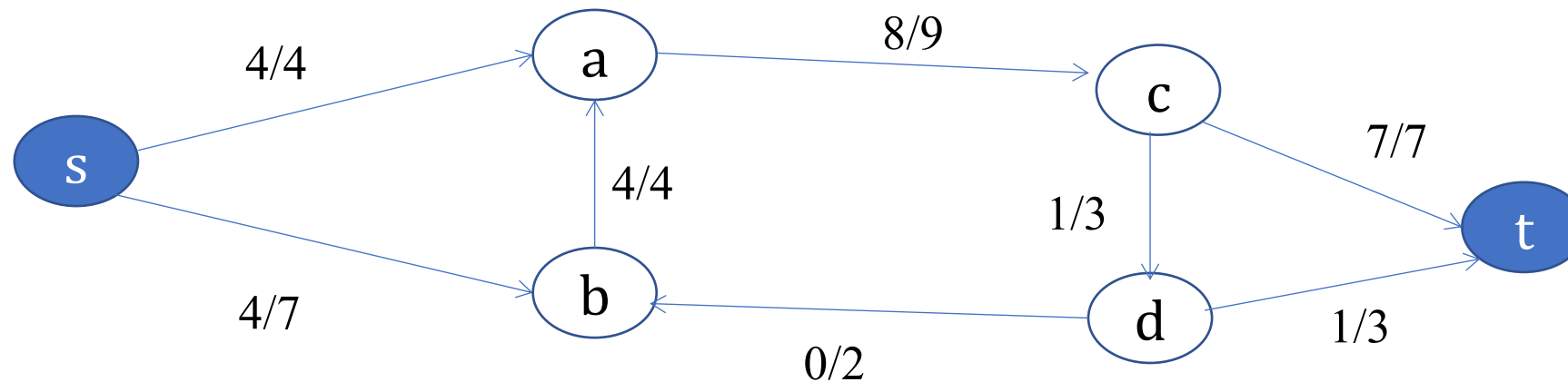


$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

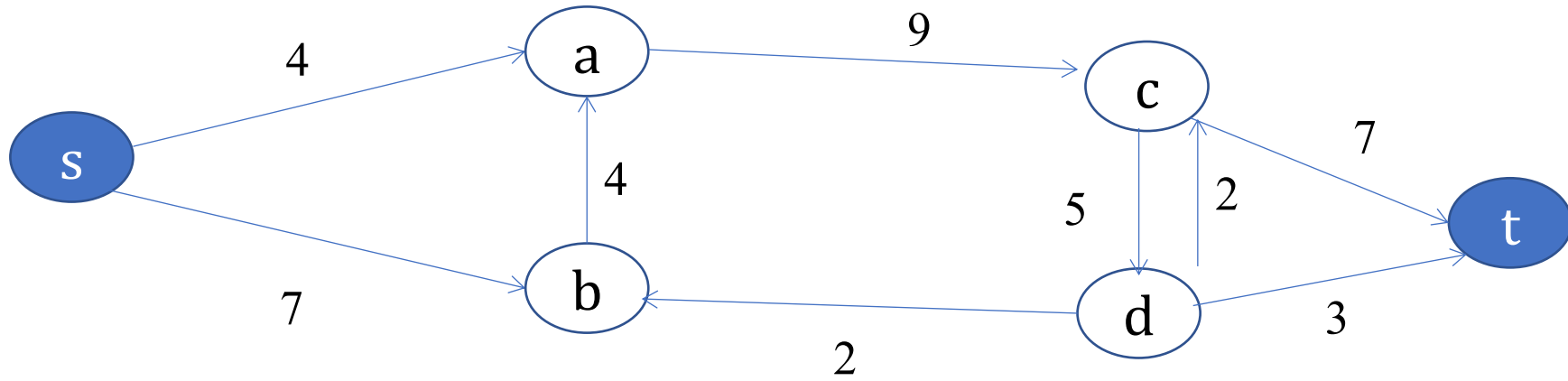




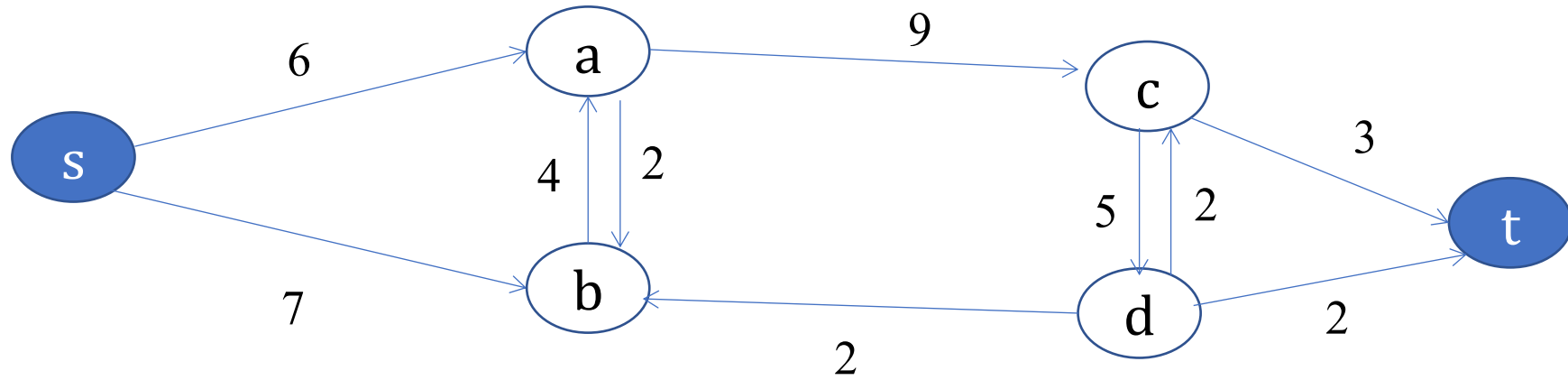
Since there isn't any augmenting path in the residual network, the algorithm is finished
 → The response will be as the following:



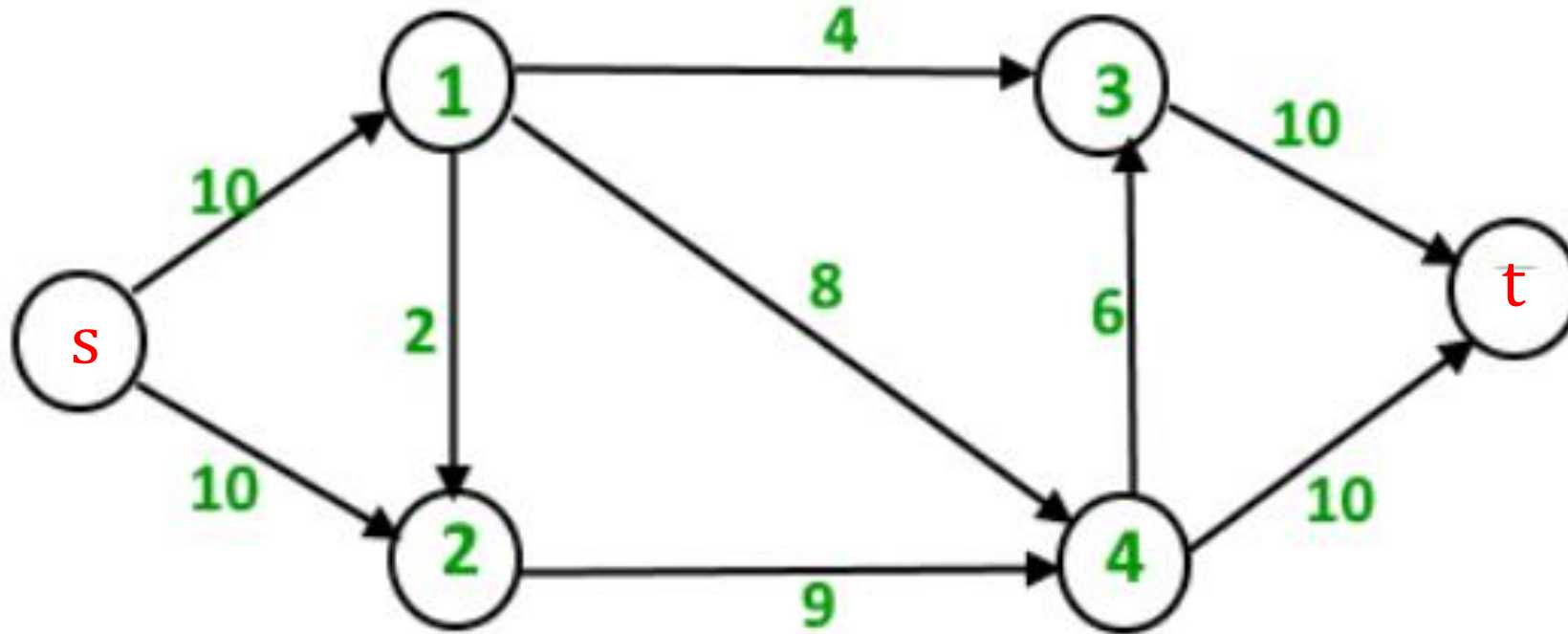
✓ کار در کلاس: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید



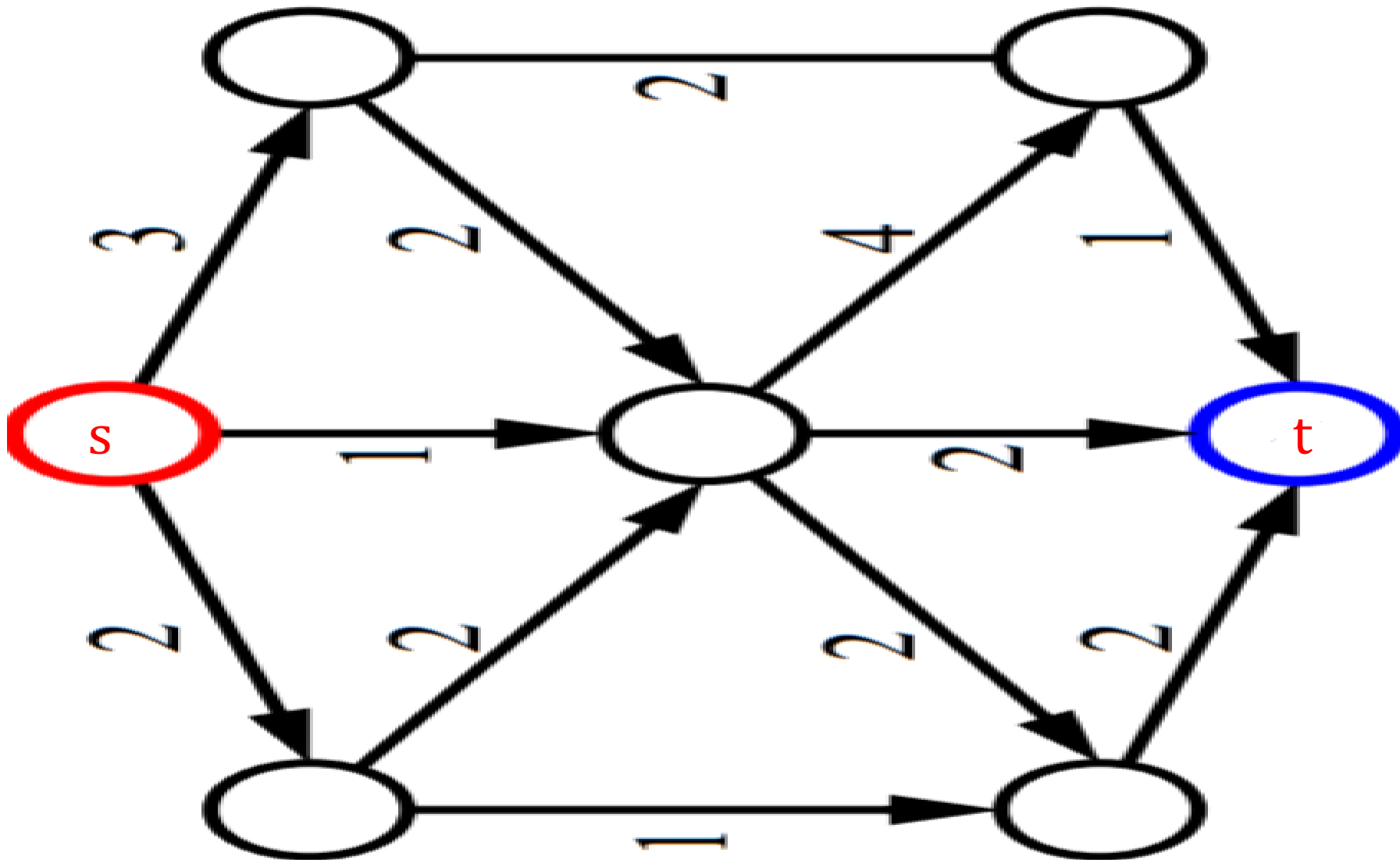
✓ کار در کلاس: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید



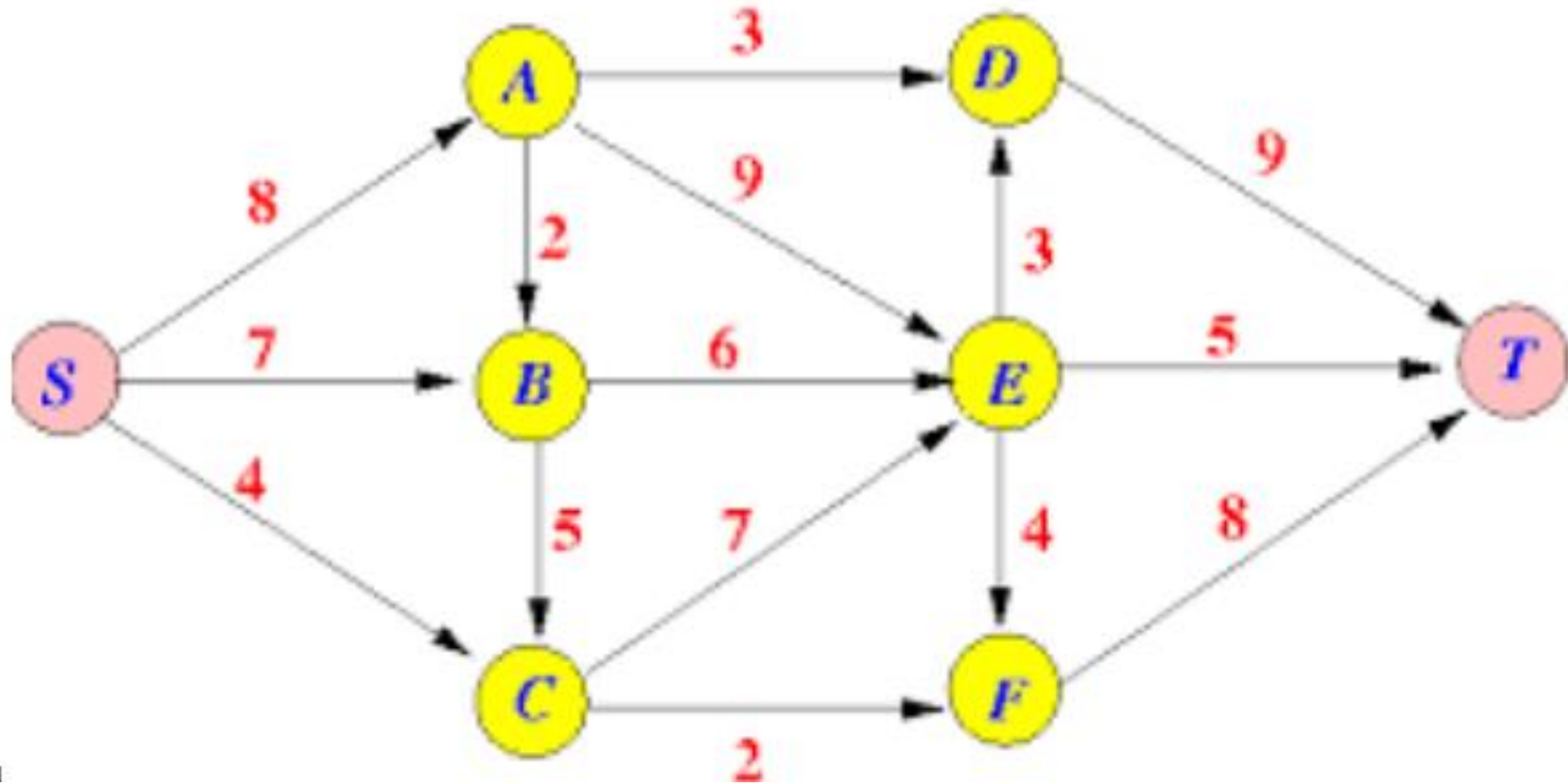
✓ کار در کلاس: الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید.



۱- الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید.



۲- الگوریتم Ford- Fulkerson را روی شبکه شاره زیر اجرا کنید.



پایان فصل ۶